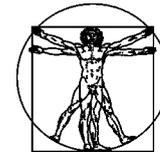


DOI: 10.15593/RZhBiomech/2019.3.04  
УДК 531/534:[57+61]



**Российский  
Журнал  
Биомеханики**  
www.biomech.ru

## **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РОГОВИЦЫ ГЛАЗА С УЧЕТОМ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ ЕЕ УПРУГИХ СВОЙСТВ ПРИ УСЛОВИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ МАЛОСТИ ДЕФОРМАЦИЙ**

**А.А. Штейн, И.Н. Моисеева, Г.А. Любимов**

Институт механики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, Россия, 119192, Москва, Мичуринский пр., 1, e-mail: stein@imec.msu.ru

**Аннотация.** Предложен метод учета нелинейности упругого поведения роговицы глаза, позволяющий эффективно оценивать влияние этого фактора на результаты экспериментов и клинических измерений. Роговица моделируется однородной изотропной безмоментной упругой поверхностью. Ее упругие свойства определяются неквадратичной зависимостью энергии деформации от компонент тензора деформации. Деформации считаются малыми. При максимально простой экспоненциальной форме этой функции появляется лишь один дополнительный параметр по сравнению с линейным случаем. Модель тестирована на задаче о раздувании роговицы давлением, которая соответствует экспериментам с изолированной роговицей. Предсказания линейной модели не согласуются с экспериментальными данными, тогда как предложенная экспоненциальная модель хорошо их описывает. Модель позволяет рассмотреть нелинейное поведение роговицы с учетом ее реальных механических свойств и минимального количества параметров. Использование нелинейной модели целесообразно в тех случаях, когда в рассматриваемом процессе внутриглазное давление и напряженное состояние роговицы меняются значительно, вследствие чего линеаризация определяющего соотношения может приводить к заметным ошибкам.

**Ключевые слова:** глаз, роговица, нелинейные упругие свойства, внутриглазное давление, статическая тонометрия, математические модели.

### **ВВЕДЕНИЕ**

Знание механических свойств глазных тканей, в частности роговицы, необходимо для корректной оценки параметров, характеризующих физическое состояние глаза (включая определение внутриглазного давления), а также для уточнения диагностических методов и при планировании операций. Между тем роговица обладает весьма сложными, недостаточно изученными и сильно индивидуальными механическими свойствами. Если даже ограничиться только упругим поведением, роговица анизотропна и пространственно неоднородна по всем направлениям, а связь напряжений с деформациями в ней нелинейна [7, 9, 12, 13, 17, 19]. Кроме того, роговица неоднородна геометрически – ее толщина и кривизна существенно меняются от центральной точки (апекса) к периферии. Тем не менее при моделировании многих механических процессов, в том числе статической тонометрии, эффективными оказываются относительно простые модели, рассматривающие

роговицу как изотропную и в тангенциальном направлении однородную линейно упругую оболочку. Авторами был разработан [2] максимально упрощенный подход к механике глазного яблока, который характеризуется небольшим количеством подлежащих определению параметров и оказался полезен при моделировании различных типов тонометрии. В рамках этого подхода роговица представляется безмоментной (мягкой) изотропной однородной линейно упругой двумерной поверхностью.

Упрощающее допущение о линейности упругого поведения роговицы присутствует во многих теоретических исследованиях, в том числе и таких, где роговица рассматривается как трехмерное упругое тело и моделирование осуществляется на основе применения метода конечных элементов и программных пакетов. Вопрос о необходимости учета нелинейности в тех или иных задачах оказывается актуальным.

Сам факт нелинейности упругого отклика глазных тканей на нагружение хорошо известен и сомнений не вызывает. Эксперименты по раздуванию внутренним давлением энуклеированного глаза, выполнявшиеся начиная с 30-х гг. прошлого века, демонстрируют заметную нелинейность зависимости внутриглазного объема от давления [10, 15, 18]. Этот факт был принят во внимание при разработке полуэмпирической теории тонометрии по Шиотцу [10, 11, 16], основанной на допущениях, достаточно произвольных с точки зрения механики. Тем не менее, как показано в [3], предсказания базирующейся на аккуратных механических допущениях линейной теории дают для не слишком больших нагружающих весов практически те же результаты.

Оказалось, однако, что опыты по растяжению изолированной роговицы давлением не могут быть удовлетворительно описаны в рамках линейной теории [4, 6, 8, 20]. Высказывались предположения об экспоненциальной форме определяющих соотношений [6, 8, 20]. Имеются также доводы в пользу того, что с увеличением растягивающего напряжения может иметь место (по крайней мере для роговицы свиньи) резкий переход от меньшей жесткости к существенно большей, т.е. зависимость для жесткости кусочно-постоянного типа [5]. Такое поведение хорошо согласуется с представлениями о структурной организации роговицы [5]. Тем не менее определяющее соотношение экспоненциального типа, будучи непрерывным, удобно для расчетов и в первом приближении может быть применено и при изломе зависимости напряжений от деформаций.

Возможность непосредственного приложения результатов упомянутых исследований, проводившихся на мертвом материале, к живому глазу вызывает сомнения. Однако экспериментальные данные по тонометрии позволяют предполагать, что нелинейность упругих свойств глазного яблока может оказаться существенной для процессов, в которых присутствуют сильно различающиеся напряженные состояния. К таковым относятся, например, раздувание глаза посредством введения больших объемов жидкости при инъекциях или тонометрия с большой разницей между тонометрическим и истинным давлениями (такова, скажем, тонометрия по Шиотцу) [3]. Успешность применения линейной теории к задачам, в которых приложенная к роговице внешняя сила относительно невелика, связана, по-видимому, с тем, что в этих задачах рассматриваются небольшие изменения напряженного состояния, допускающие линеаризацию зависимости напряжение – деформация.

В литературе нелинейность упругого поведения роговицы зачастую учитывается с помощью трехмерных моделей нелинейной упругости с конечными деформациями. Вместе с тем простая оценка показывает, что учет конечности деформаций в большинстве случаев не имеет практического смысла. В самом деле, тангенциальная

деформация  $\varepsilon$  роговицы, рассматриваемой как оболочка, имеющая форму сферического сегмента радиусом  $R_c$  и толщиной  $\delta_c$ , со средней по толщине жесткостью на растяжение  $E_c$ , при изменении давления на величину  $\Delta p$  может быть оценена формулой  $\varepsilon = (\Delta p R_c) / (2\delta_c E_c)$ . Средняя для многих людей жесткость  $E_c$  оценивается как 0,3 МПа [2]. Даже при физиологически очень большом изменении давления  $\Delta p \sim 25$  мм рт. ст. и очень мягкой роговице с жесткостью  $E_c \sim 0,2$  МПа для стандартных значений геометрических параметров ( $R_c = 8$  мм,  $\delta_c = 0,5$  мм)  $\varepsilon$  имеет порядок 0,1. Таким образом, речь может идти только о физической, а не о геометрической нелинейности, т.е. о нелинейности закона Гука при сохранении условия малости деформаций. Конечность деформаций может оказаться существенной при раздувании глаза большими объемами жидкости, что необходимо при введении некоторых лекарственных препаратов. Развивающиеся при этом внутриглазные давления могут в несколько раз превышать уровень, предшествовавший инъекции.

### ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЙ ЗАКОН ГУКА ДЛЯ ДВУМЕРНОЙ БЕЗМОМЕНТНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Остаемся в рамках базового для нашего подхода представления роговицы двумерной безмоментной изотропной и однородной поверхностью. В рамках такого подхода поверхность не сопротивляется изгибу и существенны лишь деформации и напряжения в плоскости, касательной к этой поверхности, которые характеризуются тензорами второго ранга в двумерном пространстве. В задачах, для которых в процессе деформации сохраняется условие осевой симметрии, присутствуют лишь компоненты этих тензоров, направленные по главным осям, соответствующим в каждой точке меридиональному и перпендикулярному к нему направлениям. Обозначим главные компоненты тензора деформаций  $\varepsilon_i$ , а тензора напряжений  $T_i$ , где  $i = 1, 2$ , причем индекс 1 соответствует меридиональному направлению. Двумерный тензор напряжений  $\mathbf{T}$  определяется силами, действующими на единицу длины (а не поверхности, как в трехмерном случае), и при трехмерной интерпретации соответствует усилию, действующему на площадь сечения оболочки.

Введем энергию деформации  $W(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ . Отсутствие сопротивления изгибу проявляется в том, что из числа аргументов этой функции исключены параметры, отвечающие за изменение кривизны поверхности. Тогда связь напряжений с деформациями определяется общими формулами

$$T_1 = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_1}, \quad T_2 = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_2}. \quad (1)$$

Заметим, что деформацию удобно отсчитывать от напряженного состояния, соответствующего роговице, уже растянутой некоторым внутренним давлением. Это связано с тем, что физически возможны только растянутые состояния роговицы. При сжатии она теряет устойчивость, и рассматриваемый подход становится неприменимым.

Изотропия материала роговицы в тангенциальных направлениях накладывает на энергию деформации условие симметрии

$$W(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = W(\varepsilon_2, \varepsilon_1). \quad (2)$$

Построим такую функцию  $W(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ , которая обеспечивает экспоненциальную зависимость энергии, а следовательно, и напряжений от деформаций.

Легко показать, что с учетом условия симметрии (2) задание функции  $W(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  единственной экспонентой приводит для зависимости напряжений от деформаций к вырожденным соотношениям, не описывающим реальную физическую ситуацию. В самом деле, экспонента, удовлетворяющая этому условию, имеет вид  $A \exp[B(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)]$ , приводящий к вырожденным определяющим соотношениям.

Поэтому в качестве наиболее простой реалистичной модели выберем представление энергии деформации в виде суммы двух экспонент:

$$W(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = A[\exp(B\varepsilon_1 + C\varepsilon_2) + \exp(B\varepsilon_2 + C\varepsilon_1)] + [T_0 - A(B + C)](\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + W_0, \quad (3)$$

где  $A, B, C, T_0$  и  $W_0$  постоянные. Линейное слагаемое определяет ненулевые значения напряжений  $T_1$  и  $T_2$  в начальном состоянии (при нулевых деформациях). Далее будем предполагать, что рассматриваются задачи, в которых начальное состояние соответствует сферическому сегменту, распертому некоторым начальным (отсчетным) внутренним давлением. Исходя из этого, коэффициенты при  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  во втором слагаемом соотношения (3) выбраны равными и постоянная величина  $T_0$  определяется формулой  $T_0 = p_0 R_c / 2$ , где  $p_0$  – начальное давление. Зависимость энергии деформации от главных значений тензора деформаций обеспечивает инвариантность этой зависимости.

Закон Гука получается в виде

$$\begin{aligned} T_1 &= A[B(\exp(B\varepsilon_1 + C\varepsilon_2) - 1) + C(\exp(B\varepsilon_2 + C\varepsilon_1) - 1)] + T_0, \\ T_2 &= A[B(\exp(B\varepsilon_2 + C\varepsilon_1) - 1) + C(\exp(B\varepsilon_1 + C\varepsilon_2) - 1)] + T_0. \end{aligned} \quad (4)$$

Практически линейное поведение наблюдается при деформациях малых в смысле выполнения неравенств  $B\varepsilon_i, C\varepsilon_i \ll 1$ .

Из входящих в соотношения (3) и (4) коэффициентов можно составить три константы, имеющие ясный физический смысл. Рассмотрим сначала линейаризованную по деформациям форму зависимостей (4). В этом случае, разрешая линейаризованные соотношения относительно деформаций, получаем те же формулы, что для линейной теории [2]:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E_c^*} [T_1 - \nu_c T_2 - T_0(1 - \nu_c)], \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E_c^*} [T_2 - \nu_c T_1 - T_0(1 - \nu_c)]. \quad (5)$$

Здесь  $E_c^*$  и  $\nu_c$  – упругие модули (модуль растяжения и коэффициент Пуассона) роговицы как двумерной линейно упругой поверхности при нулевых деформациях (т.е. при  $T_1 = T_2 = T_0$ ). Эти модули следующим образом выражаются через коэффициенты, входящие в (3) и (4):

$$E_c^* = \frac{A(B^2 - C^2)^2}{B^2 + C^2}, \quad \nu_c = \frac{2BC}{B^2 + C^2}. \quad (6)$$

Если предположить (уже в нелинейном случае, описываемом соотношениями (4)), что для роговицы выполняются граничные условия, позволяющие ей деформироваться под действием внутреннего давления с сохранением сферической формы, будет выполняться условие  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ , и тогда зависимости (4) приобретают форму

$$T_1 = T_2 = A(B + C)[\exp[(B + C)\varepsilon] - 1] + T_0. \quad (7)$$

Таким образом, константа  $\zeta = B + C$  отвечает за степень нелинейности при изотропном растяжении.

Ранее авторами были получены [2] оценки для средних по здоровым глазам значений упругих модулей  $E_c^*$  и  $\nu_c$ , соответствующих физически линейной модели. За нелинейное поведение роговицы отвечает единственный безразмерный коэффициент  $\zeta$ , для оценки которого нужны дополнительные эксперименты.

Выразим параметры исходной модели через упругие модули при  $T_1 = T_2 = T_0$  и параметр нелинейности  $\zeta$ :

$$B = \frac{\zeta}{2} \left( 1 \pm \sqrt{\frac{1 - \nu_c}{1 + \nu_c}} \right), \quad C = \zeta - B, \quad (8)$$

$$A = E_c^* (B^2 - C^2)^2 / (B^2 + C^2) = \frac{E_c^*}{\zeta^2 (1 - \nu_c)} = \frac{E_{cs}^*}{\zeta^2}.$$

Выбор знака в выражении для  $B$  несуществен, поскольку приводит лишь к преобразованию  $B \Rightarrow C$ ,  $C \Rightarrow B$  равноправных коэффициентов  $B$  и  $C$ . Здесь  $E_{cs}^* = E_c^* / (1 - \nu_c)$  – модуль поверхностного растяжения при  $p = p_0$ , определенный как коэффициент пропорциональности между суммой главных двумерных напряжений и локальной поверхностной деформацией:  $T_1 + T_2 = E_{cs}^* (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ .

Начальные значения давления  $p_0$  и соответствующего ему изотропного напряжения  $T_0 = p_0 R_c / 2$  условны и могут быть изменены. Нетрудно видеть, что соотношения (3) и (4) остаются инвариантными относительно преобразования

$$T_0 = p_0 R_c / 2 \Rightarrow T_0' = p_0' R_c / 2, \quad B \Rightarrow B, \quad C \Rightarrow C, \quad A \Rightarrow A(T_0') = A \frac{\exp(\zeta \Delta) - 1}{1 - \exp(-\zeta \Delta)}, \quad (9)$$

где  $\Delta$  – изотропная деформация при переходе от изотропного состояния с  $p = p_0$  к изотропному состоянию с  $p = p_0'$ , рассчитываемая из соотношений (7), (8):

$$\Delta = \frac{1}{\zeta} \ln \left[ \frac{\zeta}{E_{cs}^*} (T_0' - T_0) + 1 \right], \quad (10)$$

и последнее соотношение (8) преобразуется к виду

$$A \Rightarrow A(T_0') = A \left[ 1 + \frac{\zeta}{E_{cs}^*} (T_0' - T_0) \right].$$

При этом, естественно, переопределяется отсчетная точка для деформаций: деформации относительно переопределенного начального состояния  $\varepsilon_1'$  и  $\varepsilon_2'$  равны  $\varepsilon_1' = \varepsilon_1 - \Delta$  и  $\varepsilon_2' = \varepsilon_2 - \Delta$ .

Последнее соотношение (9) соответствует преобразованию поверхностной жесткости

$$E_{cs}^* \Rightarrow E_{cs}^* (T_0') = E_{cs}^* \frac{\exp(\zeta \Delta) - 1}{1 - \exp(-\zeta \Delta)} = E_{cs}^* + \zeta (T_0' - T_0). \quad (11)$$

В соответствии с (8) неизменность при этом преобразовании коэффициентов  $B$  и  $C$  обеспечивается неизменностью при нем параметра нелинейности  $\zeta$  и

коэффициента Пуассона  $\nu_c$ . Формула (11) с учетом (10) дает зависимость поверхностной жесткости роговицы вблизи изотропного состояния от изотропного усилия (двумерного напряжения) в этом состоянии  $T_0'$ , если значение жесткости  $E_{cs}^*$  при некотором значении  $T = T_0$  известно.

Таким образом, изменение  $p_0$  (или  $T_0$ ) не приводит к изменению физических следствий определяющего соотношения, если соответствующим образом (10) изменить жесткость  $E_{cs}^*$ . Меняется лишь его форма. Если хотя бы одна из величин  $\zeta$  или  $\nu_c$  не сохраняется при переходе от  $p = p_0$  к  $p = p_0'$ , преобразования констант, обеспечивающего инвариантность соотношений (3) и (4) при этом переходе, не существует.

При изотропном растяжении зависимость напряжения  $T = T_1 = T_2$  от изотропной деформации  $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$  имеет из (7) и (8) вид

$$T = \frac{E_{cs}^*}{\zeta} (\exp(\zeta\varepsilon) - 1) + T_0. \quad (12)$$

Зависимость  $T(\varepsilon)$  – экспоненциальная, а жесткость  $E_{cs}^*$  – линейная функция напряжения или давления (11). При обработке экспериментов по распираанию давлением изолированной роговицы человека [8] зависимости напряжения от деформации и жесткости от давления также представлялись соответственно экспоненциальной и линейной функциями, несмотря на не вполне изотропное растяжение, реализованное в этих опытах.

На рис. 1 представлена зависимость от деформации величины  $\sigma = T / \delta$ , имеющей смысл среднего по толщине растягивающего напряжения при представлении роговицы трехмерной оболочкой толщиной  $\delta = 0,5$  мм. Использование этой величины облегчает сопоставление с результатами других авторов. В рассматриваемом диапазоне деформаций нижняя кривая ( $\zeta = 10$ ) практически соответствует линейной зависимости с постоянной жесткостью. Заметим, что жесткость на одноосное растяжение  $E_c^*$

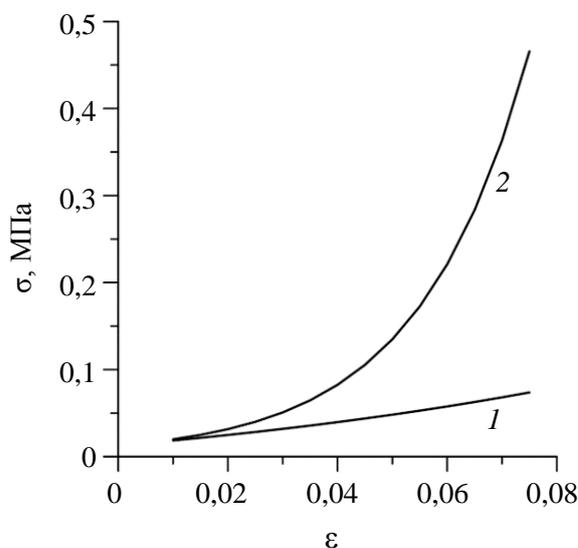


Рис. 1. Зависимость напряжения  $\sigma$  от деформации  $\varepsilon$  при изотропном растяжении:  
 1 –  $\zeta = 10$ ; 2 –  $\zeta = 50$ ;  $E_c = 0,3$  МПа

вычисляется по известным  $E_{cs}^*$  и  $\nu_c$ , но последняя величина (коэффициент Пуассона) неизвестна: ее оценка требует дополнительных измерений и (или) гипотез. Если бы роговицу можно было представить однородной по толщине несжимаемой упругой оболочкой, имело бы место равенство  $\nu_c = 0,5$ . В случае, если роговица рассматривается как слоистая оболочка, состоящая из трансверсально (в плоскости роговицы) изотропных упругих несжимаемых слоев, оценки также дают для представляющей роговицу поверхности значение  $\nu_c$ , близкое к 0,5. Для произвольного упруго-напряженного состояния локальная жесткость – тензорная величина, определяемая всеми производными  $\partial T_i / \partial \varepsilon_j$  ( $i, j = 1, 2$ ) из соотношений (4).

### СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ

Система уравнений равновесия и геометрических соотношений для роговицы как двумерной поверхности, использовавшаяся авторами ранее (см., например, [2], (1.1); [3], (4)), может быть сохранена, так как остаются в силе все положенные в основу этой системы допущения: отсутствие сопротивления изгибу, однородность и изотропия упругих свойств вдоль поверхности, а также малость деформаций. Последнее условие не исключает конечности перемещений, что существенно при решении задач тонометрии. Отличие от линейной постановки состоит лишь в использовании экспоненциальных определяющих соотношений (4) вместо предполагавшегося ранее линейного закона Гука (5). Система уравнений здесь не приводится (см. указанные работы).

### ЗАДАЧА О РАЗДУВАНИИ РОГОВИЦЫ ДАВЛЕНИЕМ

Протестируем модель на примере задачи о растяжении изолированной роговицы приложенным к ней давлением. Результаты решения этой задачи могут быть сопоставлены с известными из литературы данными экспериментов [6, 8]. Рассматривается в осесимметричной постановке выпуклая поверхность, распираемая задаваемым давлением. При давлении  $p = p_0$  поверхность считается сферическим сегментом с радиусом  $R_c = 8$  мм и радиусом основания  $R_b = 5,8$  мм (рис. 2). Выбор этого состояния условен, так как в силу малости деформаций при не слишком больших давлениях поверхность остается близкой к сферической. Таким образом, последнее допущение не ведет к снижению общности. Для линейной зависимости напряжений от деформаций задача исследована в рамках нашего подхода в [4] (в том числе в случае пространственно неоднородной роговицы). Краевые условия для этой задачи сформулированы в [4] и включают жесткое закрепление по внешнему краю. Задача решается в предположении осевой симметрии, что позволяет строить решение в одном квадранте осевого сечения с дополнительными условиями в апикальной точке: ограниченности меридиональной деформации и нормальности поверхности к оси симметрии. Модель тестируется в полном объеме, т.е. в предположении конечности смещений, хотя в собственно задаче о раздувании предположение их малости вполне правомерно. Измеряемая величина –  $\Delta h$ , подъем апекса над его положением при  $p = p_0$ .

Необходимость обобщения линейной модели для этой задачи очевидна: она следует из сопоставления результатов расчета по этой модели с экспериментальными данными [6] (рис. 3).

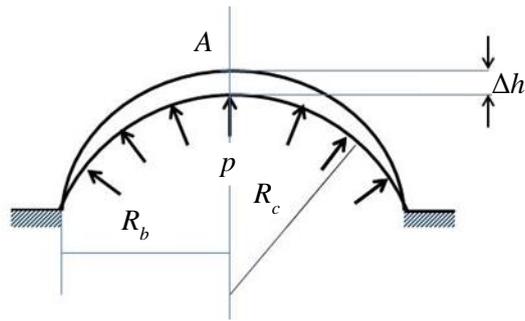


Рис. 2. Схема задачи о раздувании изолированной роговицы. Нижняя кривая – форма роговицы при начальном давлении  $p_0$  (сферический сегмент радиуса  $R_c$ ); верхняя – при увеличенном давлении  $p$ ;  $A$  – апекс;  $R_b$  – радиус основания;  $\Delta h$  – подъем апекса над его начальным положением

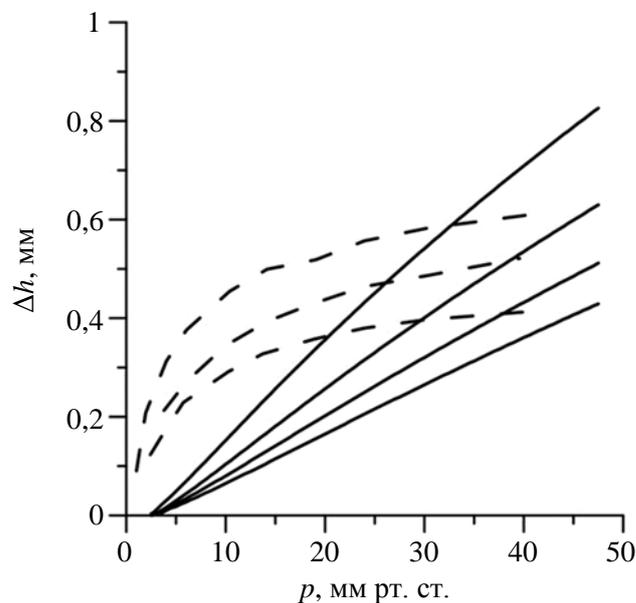


Рис. 3. Сравнение расчетных кривых для линейной модели с данными экспериментов. Пунктиром показаны экспериментальные кривые: сверху вниз образцы 2, 5 и 12 по [6]. Сплошные линии сверху вниз:  $E_c = 0,3; 0,4; 0,5; 0,6$  МПа

Близкие к линейным зависимости смещения апекса от давления, полученные в рамках физически линейной модели, никак не могут описать сильно нелинейные экспериментальные кривые. Заметим, что к полному соответствию эксперименту теоретической модели, основанной на представлении роговицы достаточно гладкой оболочкой, и не следует стремиться, поскольку эксперименты проводятся в широком диапазоне давлений, в том числе при близких к нулю, когда слабо растянутая роговица сохраняет мелкомасштабную волнистость формы [17], что должно приводить к качественному изменению соотношений.

При всех дальнейших расчетах начальное (отсчетное) давление полагалось равным  $p_0 = 12$  мм рт. ст. и смещение апекса отсчитывалось от этого состояния, в котором роговица условно принималась имеющей форму сферического сегмента. Приводимые значения жесткости, естественно, соответствуют этому состоянию. Жесткость  $E_c^*$  пересчитана к средней жесткости материала роговицы  $E_c = E_c^* / \delta$  при ее нормальной толщине  $\delta = 0,5$  мм.

На рис. 4 представлены зависимости подъема апекса от давления при разных значениях параметра нелинейности  $\zeta$  и жесткости  $E_c$ . Коэффициент Пуассона принят равным 0,45. Естественно, подъем апекса при том же давлении и фиксированном  $\zeta$  падает с ростом жесткости. Он также падает при фиксированной  $E_c$  и увеличении степени нелинейности (росте параметра  $\zeta$ ). Однако чем больше  $\zeta$ , тем менее его дальнейшее увеличение влияет на подъем апекса. При малых  $\zeta$  ( $\zeta \varepsilon \ll 1$ ) смещение апекса практически совпадает с предсказаниями линейной по деформациям теории (штрихпунктирная кривая на рис. 4, где  $\zeta = 1$ ).

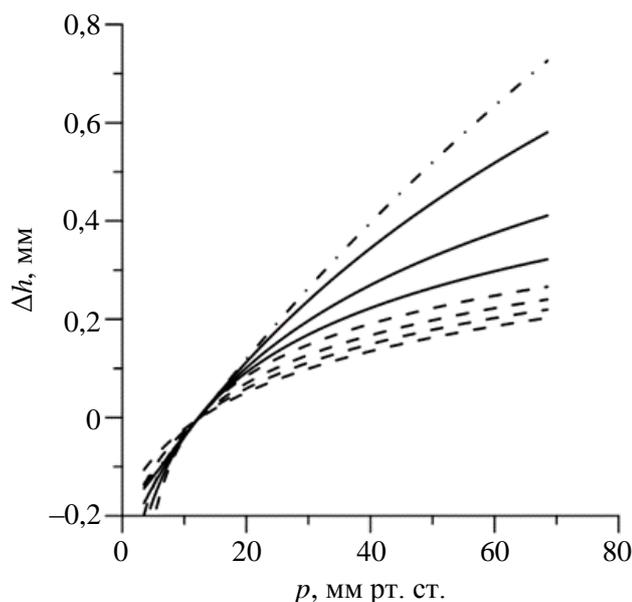


Рис. 4. Влияние жесткости и параметра нелинейности на зависимость смещения апекса роговицы от давления: сплошные линии (сверху вниз) –  $E_c = 0,4$  МПа,  $\zeta = 10, 30, 50$ ; пунктирные линии (сверху вниз) –  $\zeta = 70$ ,  $E_c = 0,4; 0,5; 0,6; 0,7$  МПа; штрихпунктир –  $E_c = 0,4$  МПа,  $\zeta = 1$

Поскольку в рассматриваемой задаче растяжение близко к изотропному, зависимость от упругих свойств определяется в основном модулем поверхностного растяжения  $E_{cs} = E_c / (1 - \nu_c)$ , а отдельная зависимость от коэффициента Пуассона в широком диапазоне его значений незначительна, становясь заметной лишь при больших давлениях и приближении к значению  $\nu_c = 1$ , соответствующему несжимаемой поверхности. Это подтверждается рис. 5. Как указано выше, для поверхности, моделирующей оболочку из несжимаемого материала, коэффициент Пуассона близок к 0,5. Из рис. 5 видно, что отклонения одна от другой кривых при коэффициенте Пуассона, отличающемся от 0,5 не более чем на 0,2, практически незаметны. Поэтому конкретный выбор значения  $\nu_c$  в этом диапазоне не существен. В приведенных далее расчетах принималось значение  $\nu_c = 0,45$ .

Возможность варьирования двух параметров  $\zeta$  и  $E_c$  позволяет получать кривые  $\Delta h(p)$ , близкие друг другу при разных парах этих параметров. Это проиллюстрировано рис. 6. Так, кривые 3a ( $E_c = 0,6$  МПа,  $\zeta = 80$ ) и 4a ( $E_c = 0,7$  МПа,  $\zeta = 70$ ) практически совпадают: разность значений  $\Delta h$  при одном и том же давлении для них не превышает 0,007 мм. Кривые 4, 1a–4a, среди которых как кривая для небольшой жесткости

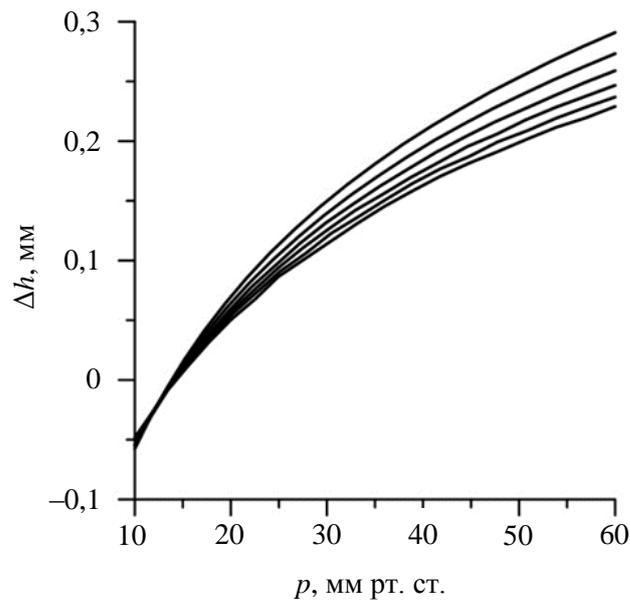


Рис. 5. Влияние коэффициента Пуассона поверхности, представляющей роговицу, на подъем апекса. Представлены зависимости  $\Delta h(p)$  при  $\zeta = 50$ ,  $E_{cs} = E_c / (1 - \nu_c) = 0,9$  МПа и коэффициенты Пуассона (снизу вверх)  $\nu_c = 0,35$ ; 0,45; 0,55; 0,65; 0,75; 0,85

$E_c = 0,4$  и большого коэффициента нелинейности  $\zeta = 90$ , так и кривая для высокой жесткости  $E_c = 0,7$  и значительного коэффициента нелинейности  $\zeta = 70$ , лежат в полосе, ширина которой не превышает 0,03 мм. Диапазон значений  $\zeta$  и  $E_c$ , при которых кривые можно практически считать совпадающими, определяется допустимой разностью значений  $\Delta h$  при одном и том же  $p$  и интервалом давлений, на котором производится исследование: этот диапазон тем шире, чем больше допустимое различие в  $\Delta h$  и уже интервал.

Экспериментально получаемые кривые смещения апекса в зависимости от давления позволяют оценить основные параметры модели  $E_c^*$  (или  $E_c$ ) и  $\zeta$ . В силу сказанного выше такая оценка может быть выполнена лишь с некоторым произволом. Экспериментальные кривые обычно начинаются с давлений, близких к нулю. Учитывая неопределенность формы роговицы при малых давлениях, будем производить сопоставление лишь при давлениях не ниже 10 мм рт. ст. В соответствии с этим будем выбирать  $p_0 = 12$  мм рт. ст. и отсчитывать смещения от положения апекса при этом давлении, т.е.  $\Delta h(p_0) = 0$ . Таким образом, при  $p < p_0$  смещения отрицательны:  $\Delta h < 0$ .

Следует помнить, что в экспериментах, строго говоря, определяется модуль поверхностного растяжения  $E_{cs} = E_c / (1 - \nu_c)$ , а выбор значения  $\nu_c$  близким к 0,5 хотя и правдоподобен теоретически, но нуждается в отдельной экспериментальной проверке. Кроме того, можно ожидать, что при достаточно медленных процессах упругие константы могут значительно меняться из-за фильтрационных процессов и, вообще говоря, не определяться однозначно.

В качестве примера рассмотрим экспериментальную кривую из работы [6] (образец 4). Как видно из рис. 7, а, эта кривая удовлетворительно приближается на интервале 5–40 мм рт. ст. к теоретическим зависимостям при разных парах значений  $\zeta$  и  $E_c$  ( $\Delta h$  порядка или меньше 0,01 мм). Относительно небольшой интервал давлений

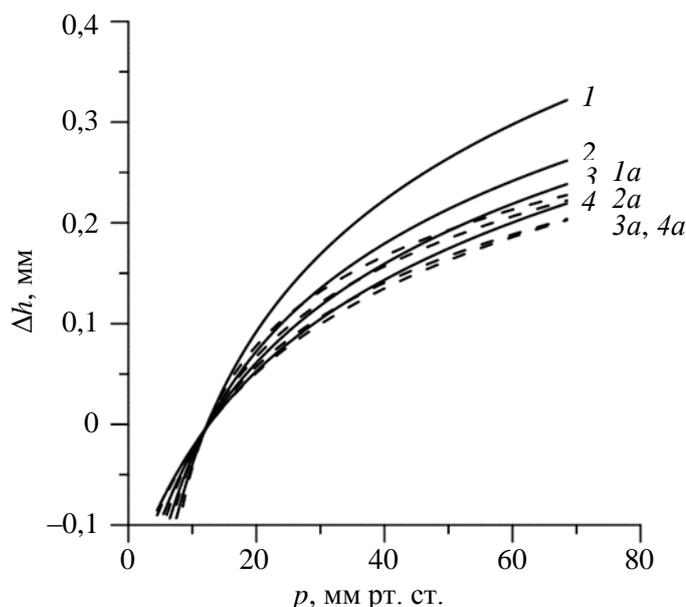


Рис. 6. Зависимость смещения апекса роговицы от давления. Сплошные кривые 1–4 соответствуют жесткостям  $E_c = 0,4; 0,5; 0,6; 0,7$  МПа и коэффициентам нелинейности  $\zeta = 50$  (кривая 1) и 60 (кривые 2–4); на пунктирных кривых 1a–4a при тех же значениях жесткости коэффициент нелинейности  $\zeta = 90$  (кривая 1a), 80 (кривые 2a, 3a) и 70 (кривая 4a)

в опыте ( $p \leq 40$ ; соответствующий эксперименту пунктир заканчивается намного левее правого конца теоретических кривых) исключает более высокую точность оценки констант, характеризующих упругое поведение роговицы. Максимальная разница между кривыми 1–4 не превышает 0,04 мм, однако такая разница достигается уже за пределами экспериментального диапазона давлений. Отличие этих кривых от экспериментальных значений – 0,005–0,01 мм. Существенно больший интервал давлений в [8] (рис. 7, б) (также приведены результаты измерений для конкретной роговицы) позволяет подобрать параметры модели с большей определенностью.

Большая, чем 0,01 мм, точность определения смещения апекса вряд ли целесообразна не столько из-за неточности измерений (их точность довольно велика), сколько из-за неизбежно приблизительного соответствия постановки задачи реальной роговице. Не представляло бы большого труда найти по экспериментальным точкам (они приведены в [6]) значения  $\zeta$  и  $E_c$  (а возможно, и  $\nu_c$ ), наилучшим образом (например, минимизируя отклонения  $\Delta h$  на интервале  $10 \leq p \leq 40$  мм рт. ст.) приближающие данные эксперимента. Однако наличие других наборов значений параметров, дающих равноправное с практической точностью приближение, делает такую процедуру неоправданной.

При сравнении результатов нашего моделирования с данными о жесткости роговицы, приводимыми в [5, 6, 8], следует иметь в виду, что при расчетах, реализованных в этих работах, роговица представлялась трехмерной оболочкой из однородного изотропного упругого материала. Таким образом (независимо от других допущений, которые варьировались) учитывалось существенное сопротивление изгибу. Как показано в [1], предсказания, даваемые на основе такой модели, ни в коей мере не соответствуют результатам измерений при тонометрии, следовательно, модель не пригодна для роговицы. Однако в рассматриваемой задаче с растяжением, близким к изотропному, учет сопротивления изгибу не дает существенной ошибки. Он приводит к некоторому уменьшению значения жесткости, определяемого по смещению апекса, однако такое уменьшение незначительно.

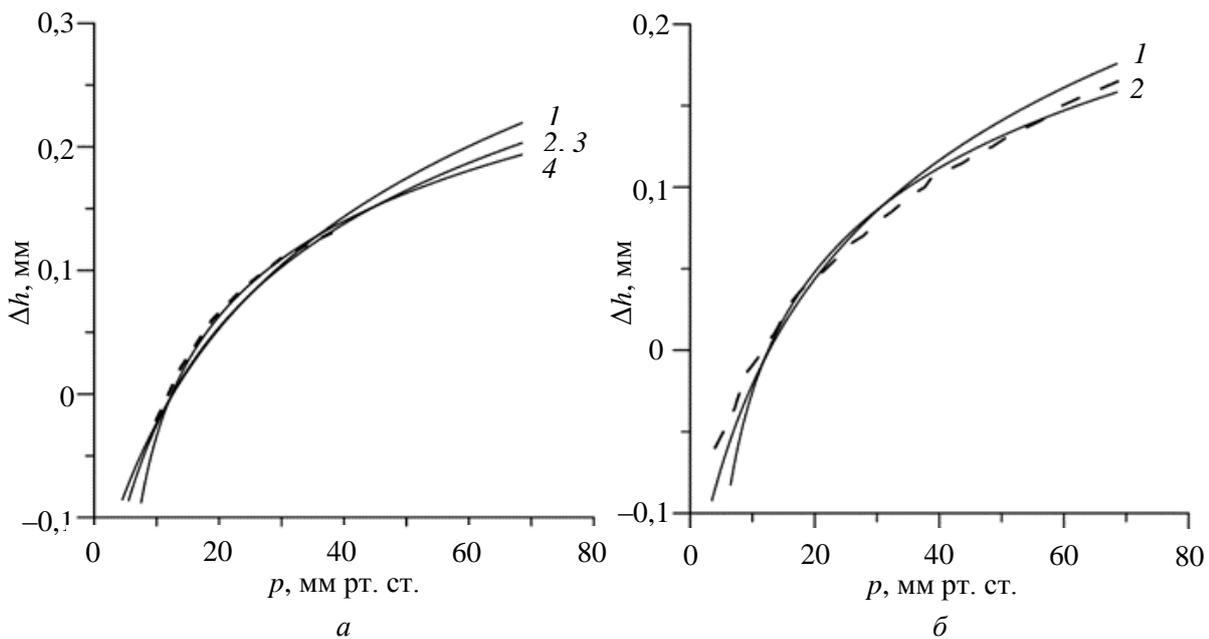


Рис. 7. Расчетные зависимости смещения апекса роговицы от давления (сплошные кривые) в сравнении с экспериментом (пунктир): *а* – образец 4 из [6]; 1 –  $E_c = 0,7$  МПа,  $\zeta = 60$ ; 2 –  $E_c = 0,65$  МПа,  $\zeta = 75$ ; 3 –  $E_c = 0,6$  МПа,  $\zeta = 80$ ; 4 –  $E_c = 0,5$  МПа,  $\zeta = 100$  (кривые 2 и 3 совпадают с графической точностью); *б* – образец, представленный на рис. 5, *а* из [8]; 1 –  $E_c = 0,8$  МПа,  $\zeta = 80$ ; 2 –  $E_c = 0,5$  МПа,  $\zeta = 100$  (для этой кривой  $R_c = 7$  мм)

Сопоставление наших результатов с упомянутыми расчетами затруднительно, прежде всего из-за того, что не приведены данные о геометрии конкретных исследованных образцов.

При трехмерном моделировании существенным параметром оказывается толщина роговицы  $\delta_c$ . При нашем подходе эта величина в модели не присутствует и используется только для удобного представления результатов. Физический смысл имеет не  $E_c$ , а  $E_c^* = E_c \delta_c$ , где параметр  $\delta_c$  условно принят равным 0,5 мм. Варьирование в разных работах значения толщины от 0,4 до 0,6 мм приводит к формальному изменению  $E_c$  на величину до 20% ее значения, что необходимо учитывать при сравнении. Впрочем, грубость выполняемых оценок делает такую поправку не слишком значительной.

Что касается двух других геометрических параметров – радиусов роговицы и ее основания  $R_c$  и  $R_b$  – то они существенны и при наших расчетах, в которых использовались средние значения, соответствующие живому глазу взрослого человека. В конкретных экспериментах для исследовавшихся мертвых образцов эти значения могут заметно отличаться. В частности, относительно небольшое уменьшение радиуса эксплантата роговицы  $R_c$  может приводить к значительному уменьшению оцениваемой жесткости при одном и том же смещении апекса. Например, полагая радиус роговицы  $R_c = 7$  мм, можно получить хорошее соответствие эксперименту расчетной кривой с существенно меньшим значением жесткости, чем при  $R_c = 8$  мм, принятом во всех других наших расчетах (см. рис. 7, *б*).

Тем не менее, диапазон определяемых по нашей модели для выбранного образца из [6] (см. рис. 7, а) значений жесткости роговицы включает значение  $E_c = 0,6$  МПа, рассчитанное для него с использованием разных конечно-элементных, линейно упругих моделей и минимизации отклонений. В [6] жесткость рассчитывалась для  $p_0 = 15$  мм рт. ст., но учитывать различие с принятым нами значением  $p_0 = 12$  мм рт. ст. нет необходимости, так как оцененная по формуле (11) разность жесткостей при этих давлениях меньше 0,05 МПа даже для максимальных исследованных значений параметра нелинейности  $\zeta$ . Результаты применения всех рассмотренных моделей, в том числе модели изотропного линейно упругого материала, к вычислению  $E_c$  дали в [6] очень близкие результаты. Другие оценки жесткости роговицы, приводимые в [6, 8], совпадают с данными наших расчетов по порядку величины.

Заметим, что полученные на основе рассмотренных экспериментов расчетные значения жесткости роговицы совпадают по порядку величины и со значениями, полученными ранее для нормального живого глаза [2] на основе нашей линейной модели (0,3 МПа), но все же оказываются заметно выше. В числе возможных причин посмертное ужесточение роговицы и особенности группы доноров (старше 50 лет), от которых взят экспериментальный материал. Известно, что роговица становится жестче с возрастом [8, 14], а также при глаукоме [14]. Еще более существенной может оказаться упомянутая выше неопределенность использованных в расчетах [6, 8] геометрических параметров.

В [6, 8] кривая  $\Delta h(p)$  приближалась также на основе физически нелинейных конечно-элементных моделей к экспоненциальной зависимости напряжений от деформаций вида  $\sigma = \alpha[\exp(\beta\varepsilon) - 1]$ . Входящие в эту зависимость коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$ , как и для случая линейной упругости, определялись минимизацией отклонений от экспериментальных точек. Физический смысл параметра  $\beta$  приблизительно тот же, что и у показателя нелинейности  $\zeta$  в нашей модели (см. соотношение (12)). Для образцов, данные по которым приведены в [6],  $\beta$  меняется в диапазоне 35–85. В [8] даны осредненные для разных возрастных групп значения  $\beta = 50 - 80$ . Для наших расчетных кривых, приближающих экспериментальные данные, параметр  $\zeta$  менялся в диапазоне 60–100. Таким образом, по порядку величины параметры  $\beta$  и  $\zeta$ , отвечающие за скорость нарастания напряжений с ростом деформаций, оказываются близки.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках нашего подхода, рассматривающего роговицу как безмоментную упругую поверхность, предложена модель, учитывающая нелинейность ее упругого поведения при сохранении предположения о геометрической малости деформаций. В соответствии с данными экспериментов на изолированной роговице принята нелинейность экспоненциального типа. Модель позволяет рассмотреть нелинейное поведение роговицы с учетом ее реальных механических свойств и минимального количества дополнительных параметров: к константам линейной модели добавляется лишь одна, отвечающая за нелинейность. Модель тестирована на задаче о деформировании роговицы под действием заданного давления. Показано, что на основе предложенной модели можно адекватно описать экспериментальные данные.

В дальнейшем модель может быть применена к практически важным задачам, в частности, к задачам тонометрии. Для многих таких задач давления (и связанные с ними тангенциальные напряжения) меняются в достаточно узком интервале. В этих случаях нет нужды отказываться от линейной модели, которая соответствует

линеаризации (5) экспоненциальной зависимости (4). Однако имеются ситуации, например при тонометрии с достаточно большой внешней нагрузкой, когда давления могут в течение одного измерения меняться в интервале шириной до 20 мм рт. ст., что заставляет предполагать значимость нелинейных эффектов. Однако этот интервал все же достаточно узок, чтобы слишком точное знание параметров модели было существенно: как видно из рис. 6, модель в некотором довольно широком диапазоне их значений может давать близкие результаты. Более точная информация о присутствующих в модели константах может оказаться существенной при моделировании раздувания глаза вводимыми объемами жидкости, когда интервал изменения давления бывает в разы больше.

Для оценки механических свойств тканей глаза *in vivo* необходимы эксперименты на живом глазу, корректная интерпретация которых требует достаточно простой, содержащей небольшое количество констант, модели глазного яблока в целом. Такая модель должна учитывать перераспределение жидкости между подроговичным и склеральным объемами. Физически и геометрически линейная модель, разработанная авторами [2] и содержащая три упругих константы, из которых лишь две существенны, легко обобщается на случай физически нелинейного упругого поведения роговицы, причем обобщенная модель отличается от физически линейной только определяющими соотношениями (4), в которых присутствует единственная дополнительная константа. Для целого глазного яблока, не нагруженного извне, основной отслеживаемый геометрический параметр – приращение внутриглазного объема за счет введения в него дополнительных объемов жидкости.

Эта же модель может быть приложена к изучению деформирования глазного яблока внешними устройствами, нагружающими роговицу, в частности тонометрами. В дальнейшем предполагается рассмотреть соответствующие задачи и оценить, в какой степени использование экспоненциальной зависимости напряжений от деформаций вида (4) дает возможность учесть имеющиеся рассогласования предсказаний физически линейной теории с данными измерений при использовании тонометров большого веса. Одной из основных целей наших исследований механики глаза была разработка моделей, позволяющих эффективно решать обратную задачу, т.е. находить параметры модели по результатам измерений. В предлагаемой работе показано, что разработанный авторами ранее подход может быть обобщен для учета нелинейного поведения роговицы. Необходимо ли учитывать нелинейное поведение также и в склеральной области, могут показать только эксперименты. Существенно бóльшая по сравнению с роговицей жесткость склеры позволяет надеяться, что учет склеральной нелинейности, связанный с появлением еще по крайней мере одной константы, не является практически необходимым.

### БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ № 17-01-00380.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бауэр С.М., Любимов Г.А., Товстик П.Е. Математическое моделирование метода Маклакова измерения внутриглазного давления // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2005. – № 1. – С. 24–39.
2. Моисеева И.Н., Штейн А.А. Анализ зависимости давление – объем для глазного яблока, нагруженного плоским штампом, на основе двухсегментной упругой модели // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2011. – № 5. – С. 3–15.

3. Моисеева И.Н., Штейн А.А. Оценка корректности стандартной методики расчета внутриглазного давления при тонометрии по Шиотцу // *Российский журнал биомеханики*. – 2015. – Т. 19, № 3. – С. 243–257.
4. Моисеева И.Н., Штейн А.А. Влияние пространственной неоднородности роговицы на деформационные свойства глазного яблока и результаты аппланационной тонометрии по Маклакову // *Биофизика*. – 2017. – Т. 62, № 6. – С. 1193–1203.
5. Anderson K., El-Sheikh A., Newson T. Application of structural analysis to the mechanical behaviour of the cornea // *J. Roy. Soc. Interface*. – 2004. – Vol. 1, № 1. – P. 3–15.
6. Bryant M.R., McDonnell P.J. Constitutive laws for biomechanical modeling of refractive surgery // *J. Biomech. Eng.* – 1996. – Vol. 118, № 4. – P. 473–481.
7. *Corneal biomechanics and refractive surgery* / Ed. F.A. Guarnieri. – Berlin: Springer, 2015. – 146 p.
8. Elsheikh A., Alhassan D., Rama P. Biomechanical properties of human and porcine corneas // *Exp. Eye Res.* – 2008. – Vol. 86. – P. 783–790.
9. Fernandez D.C., Niazay A.M., Kurtz R.M., Djotyan G.P., Juhasz T. Finite element analysis applied to cornea reshaping // *J. Biomed. Opt.* – 2005. – Vol. 10, № 6. – P. 064018. – P. 1–11.
10. Friedenwald J.S. Contribution to the theory and practice of tonometry // *Am. J. Ophthalmol.* – 1937. – Vol. 20, № 10. – P. 985–1024.
11. Friedenwald J.S. Standardization of tonometers; decennial report by the committee on standardization of tonometers. – Omaha: American academy of ophthalmology and otolaryngology, 1954. – 177 p.
12. Fu J., Haghghi-Abayneh M., Pierron F., Ruiz P.D. Depth-resolved full-field measurement of corneal deformation by optical coherence tomography and digital volume correlation // *Exp. Mech.* – 2016. – Vol. 56, № 7. – P. 1203–1217.
13. Hjortdal J.Ø. Regional elastic performance of the human cornea // *J. Biomech.* – 1996. – Vol. 29, № 7. – P. 931–942.
14. Liu B., McNally S., Kilpatrick J.I., Jarvis S.P., O'Brien C.J. Aging and ocular tissue stiffness in glaucoma // *Surv. Ophthalmol.* – 2018. – Vol. 63, № 1. – P. 56–74.
15. Macri F.J., Wanko T., Grimes P.A. The elastic properties of the human eye // *AMA Arch. Ophthalmol.* – 1958. – Vol. 60, № 6. – P. 1021–1026.
16. Moses R.A. Theory of the Schiøtz tonometer and its empirical calibration // *Trans. Am. Ophthalmol. Soc.* – 1971. – Vol. 69. – P. 494–562.
17. Reichel E., Miller D., Blanco E., Mastanduno R. The elastic modulus of central and perilimbal bovine cornea // *Ann. Ophthalmol.* – 1989. – Vol. 21. – P. 205–208.
18. Ridley F. The intraocular pressure and drainage of the aqueous humour // *Brit. J. Exp. Pathol.* – 1930. – Vol. 11, № 4. – P. 217–240.
19. Shin T.J., Vito R.P., Johnson L.W., McCarey B.E. The distribution of strain in the human cornea // *J. Biomech.* – 1997. – Vol. 30, № 5. – P. 497–503.
20. Woo S.L.-Y., Kobayashi A.S., Schlegel W.A., Lawrence C. Nonlinear material properties of intact cornea and sclera // *Exp. Eye Res.* – 1972. – Vol. 14. – P. 29–39.

## **MATHEMATICAL MODEL OF THE EYE CORNEA WITH ACCOUNT FOR AN EXPONENTIAL NONLINEARITY OF ITS ELASTIC PROPERTIES UNDER THE ASSUMPTION OF GEOMETRIC SMALLNESS OF STRAINS**

**A.A. Stein, I.N. Moiseeva, G.A. Lyubimov (Moscow, Russia)**

A method is proposed for taking into account the nonlinearity of the elastic behavior of the cornea of the eye, which makes it possible to effectively evaluate the influence of this factor on the results of experiments and clinical measurements. The cornea is modeled by a homogeneous isotropic momentless elastic surface. Its elastic properties are determined by a nonquadratic dependence of the strain energy on the components of the strain tensor. Strains are assumed to be small. For the simplest exponential form of this function, a single additional parameter appears in comparison with the linear case. The model is tested on the problem of inflating the cornea with pressure, which corresponds to experiments with an isolated cornea. Predictions of the linear model do not agree with experimental data, whereas the proposed exponential model describes them well. The model allows us to consider the nonlinear

behavior of the cornea, taking into account its real mechanical properties and the minimum number of parameters. The use of the nonlinear model is advisable in those cases where in the process under consideration the intraocular pressure and the stressed state of the cornea vary significantly, as a result of which the linearization of the constitutive relation can lead to noticeable errors.

**Key words:** eye, cornea, nonlinear elastic properties, intraocular pressure, static tonometry, mathematical models.

*Получено 23 июля 2019*