ISSN 2409-6601. Российский журнал биомеханики. 2019. Т. 23, № 2: 261–266

Российский Журнал Биомеханики
www.biomech.ru

DOI: 10.15593/RZhBiomeh/2019.2.08
УДК 531/534: [57+61]

БИОМЕХАНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РОСТОВЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

В.А. Лохов

Кафедра вычислительной математики, механики и биомеханики Пермского национального исследовательского политехнического университета, Россия, 614990, Пермь, Комсомольский проспект, 29, e-mail: valeriy.lokhov@yandex.ru

Аннотация. Деформации роста характерны в основном для живых систем. Рост происходит в каждом живом организме, а у человека он наиболее характерен для детского возраста. К сожалению, некоторые дети рождаются с врожденными патологиями, например, с врожденной расщелиной твердого нёба, и если не проводить лечение и не оказывать влияние на процессы роста, то такой ребенок может стать инвалидом. С точки зрения биомеханики и механики сплошной среды, деформации роста могут быть рассмотрены как собственные деформации. Также известно, что механические напряжения оказывают влияние на процессы роста, следовательно на ростовые деформации. Таким образом, ортодонтическое лечение может быть рассмотрено как управление ростовыми деформациями. В работе использован метод декомпозиции собственной деформации в линейно-упругом теле, позволяющий разложить собственную деформацию на две части: первая часть не вызывает напряжений в системе, а вторая часть не вызывает деформации системы. Показано применение данного подхода в решении задач независимого управления собственными деформациями, дана постановка задачи моделирования систем с собственными деформациями. Предложенный подход применен для моделирования ростовых деформаций при лечении врожденной расщелины твердого нёба. Получено определяющее соотношение для ростовой деформации, проведен его анализ и показано, что при определенных граничных условиях рост не будет вызывать напряжений в системе, что существенно упрощает процедуру решения задачи о накоплении ростовой деформации с течением времени. Этот результат важен для планирования оптимального ортопедического лечения данной патологии, которое приводит к задаче независимого управления деформациями системы посредством ростовых деформаций. Определяющее соотношение получено для изотропного однородного тела, так как костная ткань ребенка не имеет сформированной структуры и изотропна.

Ключевые слова: расщелина твердого нёба, ортопедическое лечение, управление.

Введение

Расщелина верхней губы и нёба является самым распространенным врожденным пороком развития челюстно-лицевой области. По данным статистики различных стран мира, число детей, рожденных с врожденной патологией зубочелюстной системы, в среднем составляет от 1 на 500 до 1 на 1000 новорожденных. Имеется тенденция к увеличению частоты рождаемости детей с данной патологией [3, 15].

Наличие расщелины верхней губы и нёба у новорожденного приводит к множественным функциональным нарушениям, связанным в том числе с жизненно важными функциями дыхания, сосания и глотания. При аномалиях лицевого скелета нарушается нормальная функция твердого нёба – оптимальное распределение

Лохов Валерий Александрович, к.ф.-м.н., доцент, Пермь

напряжений, возникающих в области верхней челюсти в процессе деятельности жевательного аппарата при создании пищевого комка. Процесс жевания оказывается неспособным дать нормальное распределение сил в костной системе, что, в свою очередь, ведет к перегрузке и недогрузке всех элементов системы [1, 2, 4, 5, 21].

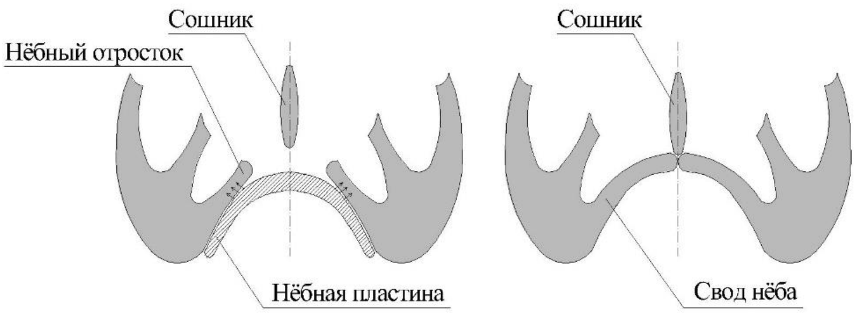
Методики лечения разнообразны, однако большинство российских авторов высказывают мнение о пошаговой предоперационной ортопедической реконструкции врожденных дефектов верхней челюсти у детей [8, 9, 13, 14, 16, 19, 21, 22]. Ведущим этапом лечения в данном случае является механическое воздействие ортопедических аппаратов на разобщенные нёбные фрагменты с целью уменьшения костного дефекта твердого нёба.

Схематически процедура ортопедического лечения приведена на рисунке.

Очевидно, что ортопедические аппараты позволяют опустить нёбные отростки из практически вертикального состояния до положения, при котором последующее зашивание нёба вызывает незначительные деформации зубочелюстной системы.

К сожалению, ортопедическое лечение основано на эмпирическом опыте и субъективных представлениях врачей о ростовых процессах в костной ткани – не существует научно обоснованных стандартов лечения, которые определяли бы для каждого пациента индивидуально эффективный способ достижения наилучших результатов.

Таким образом, решение задач биомеханики ростовых деформаций является важным, например, при ортопедической реконструкции расщелины твердого нёба.



а *б*

Рис. Положение фрагментов нёба до (*а*) и после (*б*) ортопедического лечения

Задача управления ростовыми деформациями

Определяющее соотношение биомеханической модели роста Хсю, используемое в данной статье, подробно описано в работе [6]:

$$\boldsymbol{\xi}^g = \mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot\cdot \boldsymbol{\sigma}, \tag{1}$$

где $\mathbf{A}$ – тензор второго ранга, определяющий генетический рост ткани; $\mathbf{B}$ – тензор четвертого ранга, характеризующий влияние напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ на деформации скорости роста $\boldsymbol{\xi}^g$. Для изотропного материала тензоры $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ можно упростить:

$$\mathbf{A} = A\mathbf{I}, \quad \mathbf{B} = B\mathbf{C}^{-1}, \tag{2}$$

где $\mathbf{I}$ – единичный тензор второго ранга, $\mathbf{C}^{-1}$ – тензор упругой податливости (здесь считается, что упругие свойства ткани не зависят от времени), A и B – скалярные параметры, не зависящие от времени, определяющие рост ткани. С учетом (2) формула (1) принимает вид

$$\boldsymbol{\xi}^g = A\mathbf{I} + B\boldsymbol{\varepsilon}^e, \tag{3}$$

ISSN 2409-6601. Российский журнал биомеханики. 2019. Т. 23, № 2: 261–266

где $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ – тензор упругой деформации. Отметим, что формула (3) является феноменологической и отражает только макроскопическое накопление ростовых деформаций. Такие процессы, как, например, изменение массы, процессы в клетках это соотношение не учитывает, но в рамках данной задачи это не нужно.

Полная дифференциальная постановка задачи растущего упругого тела, занимающего область V с границей S, $\bar{V} = V \cup S$, $S = S_u \cup S_\sigma$, такова:

– определяющее соотношение для ростовой деформации (3);

– скорость деформации $\boldsymbol{\xi}$ является суммой упругой $\boldsymbol{\xi}^e$ и ростовой $\boldsymbol{\xi}^g$ составляющих

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^e + \boldsymbol{\xi}^g, \quad \mathbf{r} \in \bar{V}; \tag{4}$$

– закон Гука

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot\cdot \boldsymbol{\varepsilon}^e, \quad \mathbf{r} \in \bar{V}; \tag{5}$$

– уравнение равновесия при отсутствии внешних сил

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0, \quad \mathbf{r} \in V; \tag{6}$$

– геометрическое соотношение Коши

$$\boldsymbol{\xi} = \frac{1}{2}\left(\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v}\nabla\right), \quad \mathbf{r} \in \bar{V}; \tag{7}$$

– граничные условия

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{r} \in S_\sigma, \ \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{r} \in S_u; \tag{8}$$

– начальные условия

$$\mathbf{u}(t = 0) = 0, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^g = 0, \quad \mathbf{r} \in \bar{V}. \tag{9}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^g = \int_0^t \boldsymbol{\xi}^g(t)dt. \tag{10}$$

Уравнения (3) – (10) позволяют рассчитать накопление ростовой деформации с течением времени во фрагменте, если известны усилия $\mathbf{F}$ на границе S_σ. Отметим, что указанные тензорные и векторные поля являются функциями пространственных координат и времени. Считается, что опоры на границе S_u исключают движение тела как твердого целого.

Применение теории независимого управления деформациями к решению задачи

С точки зрения механики, ростовая деформация относится к собственной деформации, общие свойства которой изучены в работах [7, 10–12, 17, 19]. Под собственной деформацией в данной работе будем понимать ростовую деформацию в уравнении (4).

Для задачи теории упругости с собственной деформацией доказана теорема о декомпозиции собственной деформации на составляющую, свободную от напряжений (импотентную часть) $\boldsymbol{\varepsilon}_u^*$, и составляющую, свободную от деформации (нильпотентную часть) $\boldsymbol{\varepsilon}_\sigma^*$ [19]:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \boldsymbol{\varepsilon}_u^* + \boldsymbol{\varepsilon}_\sigma^*. \tag{11}$$

Анализ собственных деформаций проводится в терминах энергетического линейного гильбертова пространства H с использованием следующих правил вычисления скалярного произведения и нормы:

$$\left(\boldsymbol{\varepsilon}_1^*, \boldsymbol{\varepsilon}_2^*\right)_H = \int_V \boldsymbol{\varepsilon}_1^* \cdot\cdot \mathbf{C} \cdot\cdot \boldsymbol{\varepsilon}_2^* \, dV, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_1^*, \boldsymbol{\varepsilon}_2^* \in H, \ \left\|\boldsymbol{\varepsilon}^*\right\|_H = \sqrt{\left(\boldsymbol{\varepsilon}^*, \boldsymbol{\varepsilon}^*\right)_H}. \tag{12}$$

Показано, что свободные от напряжений собственные деформации $\boldsymbol{\varepsilon}_u^*$ образуют подпространство H_u, а нильпотентные собственные деформации – подпространство H_σ. При этом подпространства H_u и H_σ взаимно ортогональны:

$$\left(\boldsymbol{\varepsilon}_u^*, \boldsymbol{\varepsilon}_\sigma^*\right)_H = 0, \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_u^* \in H_u, \forall \boldsymbol{\varepsilon}_\sigma^* \in H_\sigma.$$

В работе [18] доказана теорема, что для любой собственной деформации $\boldsymbol{\varepsilon}_u^* \in H_u$ можно подобрать внешние силы (поверхностные и объёмные), создающие в таком же упругом теле деформацию $\boldsymbol{\varepsilon}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_u^*$ (теорема об импотентной собственной деформации).

Для того чтобы собственная деформация $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ не вызывала напряжений в любой точке тела ($\boldsymbol{\varepsilon}^* \notin H_u$), необходимо и достаточно, чтобы:

1) собственная деформация была совместной, т.е.

$$\exists \mathbf{w}, \quad \mathbf{r} \in \overline{V} \ \text{ такое, что } \boldsymbol{\varepsilon}^* = \tfrac{1}{2}(\nabla \mathbf{w} + \mathbf{w} \nabla), \tag{13}$$

2) перемещения равны нулю на опорах

$$\mathbf{w} = 0, \quad \mathbf{r} \in S_u. \tag{14}$$

Эти условия доказаны в работе [17], будем называть их условиями импотентной собственной деформации.

Таким образом, принадлежность собственной деформации подпространству H_u можно проверить либо по теореме об импотентной собственной деформации, либо по условиям импотентной собственной деформации (13), (14).

В задаче (3) – (10) зависимость от времени заложена в граничных условиях, а также в формуле (3). Изменение поля напряжений во времени будет изменять упругую деформацию $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ и скорость ростовой деформации $\boldsymbol{\xi}^g$. Поле напряжений меняется за счет изменения внешних нагрузок и за счет неимпотентности ростовой деформации $(\boldsymbol{\varepsilon}^g \notin H_u)$.

Использование свойств импотентных собственных деформаций позволит в некоторых случаях перейти от постановки задачи в скоростях к постановке задачи в перемещениях, где время будет входить только как параметр. Рассмотрим условия, при которых можно так сделать.

Первым условием является постоянство функции $\mathbf{F}$ (поверхностные силы) от времени:

$$\mathbf{F} = \mathrm{const}\,(t), \quad \mathbf{r} \in S_\sigma. \tag{15}$$

Тогда зависимость от времени будет вызвана только неимпотетностью ростовых деформаций, так как будут меняться напряжения в системе вследствие роста.

Вторым условием является то, что граничные условия на S_u допускают всестороннее расширение.

Рассмотрим момент времени dt, тогда ростовая деформация, вычисляемая из формулы (3), будет следующей:

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^g = A\mathbf{I}dt + B\boldsymbol{\varepsilon}^e dt. \tag{16}$$

Тогда слагаемое $A\mathbf{I}dt$ удовлетворяет условию (13), а реализация условия (14) в данном случае приводит к необходимости всестороннего расширения на S_u. Слагаемое $B\boldsymbol{\varepsilon}^e dt$ удовлетворяет теореме об импотентной собственной деформации, так как при $t = 0$ упругая деформация $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ создана только усилиями на границе S_σ. Таким образом ростовая деформация (16) принадлежит подпространству H_u и не изменит напряжения в системе. Для следующего момента времени $2dt$ рассуждения будут аналогичными.

Если указанные два условия выполнены, то интегрирование формулы (3) с учетом свойств выражения (16) дает формулу для ростовой деформации

$$\boldsymbol{\varepsilon}^g = (A\mathbf{I} + B\boldsymbol{\varepsilon}^e)t, \tag{17}$$

а остальные уравнения задачи можно записать в перемещениях, а не в скоростях.

Выводы

В работе рассмотрена задача о лечении врожденной расщелины твердого нёба как задача независимого управления деформациями системы с помощью собственной деформации, под которой в данной работе понимают ростовую деформацию.

В результате при постоянных поверхностных силах и граничных условиях, допускающих всестороннее расширение материала, ростовая деформация не будет менять поле напряжений и будет происходить с постоянной скоростью. В таких случаях можно ставить и решать задачу о моделировании ростовых деформаций в перемещениях.

Отметим, когда рост идет длительное время, конфигурация системы может измениться значительно. Эти изменения необходимо анализировать дополнительно.

Список литературы

1. Абдрахманов С.А., Орозбеков С.Б. Ближайшие результаты применения различных методов уранопластики при лечении расщелин нёба // Республиканский межведомственный сборник. – 1991. – Вып. 26. – С. 122–124.
2. Агеева Л.В. Первичная ринохейлопериостеопластика в реабилитации детей с врожденной односторонней расщелиной верхней губы и нёба: автореф. дис. … канд. мед. наук. – М., 1999. –21 с.
3. Бессонов С.Н. Хирургическое лечение деформаций носа при врожденных двусторонних расщелинах верхней губы (обзор) // Российская ринология. – 2005. – № 3. – С. 43–47.
4. Дьякова С.В. Специализированное лечение детей с врожденной и наследственной патологией челюстно-лицевой области (ЧЛО) в системе диспансеризации // Врожденная и наследственная патология головы, лица и шеи у детей: актуальные вопросы комплексного лечения. – М.: Изд-во Моск. гос. мед.-стомат. ун-та, 2002. – С. 91–95.
5. Исмайлова В.И., Дмитриенко С.В., Пироженко А.Е. Опыт раннего ортопедического лечения детей с врожденной патологией верхней губы и нёба // Актуальные вопросы стоматологии: тез. докл. – Волгоград, 1994. – С. 52–53.
6. Лохов В.А., Долганова О.Ю., Няшин Ю.И. Биомеханическое моделирование эффекта сближения фрагментов твердого нёба при ортопедическом лечении // Российский журнал биомеханики. – 2012. – Т. 16, № 1 (55). – С. 38–45.
7. Лохов В.А., Няшин Ю.И., Туктамышев В.С. Развитие метода декомпозиции в механике деформируемого твердого тела // Известия Саратовского университета. Новая серия: Математика, механика, информатика. – 2010. – Т. 10, вып. 3.– С. 54–59.
8. Масич А.Г. Математическое моделирование ортопедического лечения врожденной расщелины твердого нёба у детей: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. – Пермь, 2000. – 16 с.
9. Симановская Е.Ю. Реабилитация детей с врожденными расщелинами губы и нёба в условиях Пермского центра по диспансеризации и лечению // Врожденная и наследственная патология головы, лица и шеи у детей: актуальные вопросы комплексного лечения. – М: Изд-во Моск. гос. мед.-стомат. ун-та, 2002. – С. 235–237.
10. Туктамышев В.С., Лохов В.А., Няшин Ю.И. Исследование методики независимого управления полными деформациями посредством собственных деформаций в дискретизированных системах // Вычислительная механика сплошных сред. – 2011. – Т. 4, № 3.– С. 110–119.

11. Туктамышев В.С., Лохов В.А. Метод независимого управления механическими напряжениями в деформируемых системах // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2008. – Т. 14, № 2. – С. 269–281.
12. Туктамышев В.С., Лохов В.А., Няшин Ю.И. Независимое управление напряжениями и деформациями в растущих живых тканях // Российский журнал биомеханики. – 2011. – Т. 15, № 2 (52). – С. 69–76.
13. Шарова Т.В. Влияние различных методов лечения детей с врожденной сквозной расщелиной верхней губы и нёба на рост и развитие челюстей // Актуальные вопросы ортодонтического лечения: тез. докл. – Иркутск, 1990. – С. 106–107.
14. Шульженко В.И. Вариант изучения и анализа протоколов реабилитации детей с несращением губы и нёба, применяемых в мире // Кубанский научный медицинский вестник. – 2011. – № 2. – С. 196–199.
15. Bardach M.D. J. Chirurgiczno-ortodotyczne leczenie rozszczepow wargi gornej, wyrostka zebodolowego i podniebienia // Czasop. Stomatol. – 1968.– Vol. 6, № 21. – P. 615–621.
16. Latham R. Orthopedic advancement of the cleft maxillary segment: a preliminary report // Cleft Palate J. – 1980. – Vol. 3, № 17. – P. 227–233.
17. Lokhov V., Nyashin Y., Ziegler F. Statement and solution of optimal problems for independent stress and deformation control by eigenstrain // Z. Angew. Math. Mech. – 2009. – Vol. 89, № 4. – P. 320–332.
18. Lokhov V., Nyashin Y., Kiryukhin V., Ziegler F. Theorem on stress-free eigenstrain and Duhamel's analogy // Journal of Theoretical and Applied Mechanics, Sofia. – 2006. – Vol. 36, № 3. – P. 35–46.
19. Lokhov V., Nyashin Y., Ziegler F. Decomposition method in linear elastic problems with eigenstrain // Z. Angew. Math. Mech. – 2005. – Vol. 85, № 8. – P. 557–570.
20. Masich A.G., Simanovskaya E.Yu., Chernopazov S.A., Nyashin Y.I., Dolgopolova G.V. The role of mechanical factor in orthopedic treatment of congenital palate cleft in children // Russian Journal of Biomechanics. – 1999. – Vol. 4, № 1. – P. 101–109.
21. Mossey P. Global registry and database on craniofacial anomalies. Report of WHO Registry Meeting on Craniofacial Anomalies. – Geneva, 2003. – 101 p.
22. Rintala A.E., Haapanen M.-L. The correlation between training and skill of the surgeon and reoperation rate for persistent cleft palate speech // British Journal of Oral-Maxillo-Facial Surgery. – 1995. – Vol. 33. – P. 295–298.

BIOMECHANICAL ANALYSIS OF GROWTH STRAIN

V.A. Lokhov (Perm, Russia)

Growth strains appear mainly in living systems. Growth occurs in every living organism, and for a human it is most meaningful at childhood. Unfortunately, some children are born with congenital abnormalities, for example, with a congenital cleft of the hard palate. Without treatment and influence of the growth processes, such a child may become disabled. From the points of biomechanics and continuum mechanics, growth strains can be considered as eigenstrains. It is also known that mechanical stresses affect the growth processes, hence the growth deformation. Thus, orthodontic treatment can be considered as growth control problem. The paper uses the theorem of eigenstrain decomposition in a linear elastic body, which allows us to decompose the eigenstrain into two parts: stress-free (or impotent), and deformation-free (or nilpotent). The paper shows the application of the theorem in the solution of stress-free deformation control by eigenstrain, the statement of a problem of modelling of systems with eigenstrain is given. The proposed approach is used to simulate growth deformations in the treatment of congenital cleft of the hard palate. The governing equation for the growth strain is discussed and analyzed, and it is shown that under certain boundary conditions the growth will not cause stresses in the system, which greatly simplifies the solution for the problem of growth strain accumulation over time. This result is important for planning the optimal orthopedic treatment of the pathology, which leads to the problem of independent control of system deformations by means of growth strains. The governing equation is obtained for an isotropic homogeneous body, since the bone tissue of the child has no formed structure and isotropic.

Key words: cleft of the hard palate, orthopaedic treatment, control.

Получено 4 марта 2019