

DOI: 10.15593/RZhBiomeh/2019.1.01  
УДК 531/534:[57+61]



## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛАСТОТОНОМЕТРИИ ПО МАКЛАКОВУ В СЛУЧАЕ ИСКУССТВЕННО СОЗДАННОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ РОГОВИЦЫ

И.Н. Моисеева, А.А. Штейн

Институт механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, Россия, 119192, Москва, Мичуринский пр., 1, e-mail: stein@imec.msu.ru

**Аннотация.** Изучается механический отклик глаза на нагружение роговицы широкими плоскими штампами разного веса (эластотонометрия по Маклакову) в случае сильной искусственно вызванной неоднородности упругих свойств роговицы, формирующейся в результате операций по коррекции зрения. Рассматривается ослабление роговицы в области апекса либо в периферической кольцевой зоне, лежащей вблизи склеры, но не прилегающей к последней. Первый случай соответствует хирургической коррекции миопии, второй – гиперметропии. Роговица моделируется безмоментной линейно упругой поверхностью, а склеральная область – упругим резервуаром, откликающимся изменением объема на изменение давления. При таком представлении механические свойства роговицы характеризуются эффективной жесткостью – параметром, содержащим в себе как упругие свойства материала роговицы, так и ее толщину. Показано, что при умеренной жесткости роговицы зависимость тонометрического давления от веса тонометра остается, как и в случае однородной роговицы, близкой к линейной, что позволяет вводить коэффициент эластоподъема как наклон соответствующей прямой. Изучена зависимость этого коэффициента от параметров, характеризующих распределение упругих свойств роговицы при различных значениях истинного давления и склеральной жесткости. Влияние неоднородности роговицы оказалось качественно различным для апикального и периферийного ее ослабления, однако незначительным, причем в последнем случае оно слабее и вообще практически незаметно. Таким образом, к прооперированным глазам с умеренно жесткой роговицей можно применять разработанные ранее методики клинической оценки результатов эластотонометрии.

**Ключевые слова:** глаз, математические модели, корнеосклеральная оболочка, упругие свойства, внутриглазное давление, эластотонометрия, тонометр Маклакова, неоднородность упругих свойств роговицы, операции по коррекции зрения.

### ВВЕДЕНИЕ

Роговица глаза обладает весьма сложными, недостаточно изученными и сильно индивидуальными механическими свойствами [3, 9, 13]. Если даже ограничиться только упругим поведением, роговица анизотропна и пространственно неоднородна, а ее упругие свойства нелинейны [10, 11, 14, 15]. Кроме того, роговица неоднородна геометрически – ее толщина и кривизна существенно меняются от центральной точки (апекса) к периферии. Тем не менее при моделировании многих механических процессов, в том числе статической тонометрии, эффективными оказываются

---

© Моисеева И.Н., Штейн А.А., 2019

Моисеева Ирина Никитична, к.ф.-м.н., с.н.с. Института механики, Москва

Штейн Александр Александрович, к.ф.-м.н., в.н.с. Института механики, Москва

относительно простые модели, рассматривающие роговицу как сферическую, изотропную и в тангенциальном направлении однородную линейно упругую оболочку [2, 4, 6].

Учет влияния пространственной неоднородности становится существенным, когда рассматривается роговица, подвергшаяся значительным механическим изменениям в результате корректирующих зрение механических операций. Такого рода операции в последние десятилетия стали массовыми. В частности, широко применяются операции, при которых удаляется материал роговицы из некоторой области, прилегающей к ее внешней поверхности [1]. Локализация этой области может быть различной – в центре или на периферии – в зависимости от исправляемого дефекта зрения. Поскольку толщина удаляемого слоя составляет заметную долю всей толщины роговицы, а именно ближние к поверхности слои в наибольшей степени отвечают за ее прочностные свойства [10], происходит значительное механическое ослабление роговицы в оперированной зоне – ее эффективная жесткость на растяжение сильно падает. Такое ослабление неизбежно влияет на связь характеристик, определяемых при непрямых офтальмологических измерениях, с физически существенными параметрами механического состояния глаза: методы оценки, разработанные для интактного глаза, могут оказаться недостоверными.

К числу диагностических процедур, базирующихся на оценке деформации роговицы под механическим воздействием, относятся собственно тонометрия, направленная на оценку внутриглазного давления, и дифференциальная тонометрия, дающая возможность комплексной оценки механических свойств и механического состояния глаза. Если для нагружения используется тонометр Маклакова (широкий плоский штамп), эту процедуру принято называть эластонометрией. Диагностические возможности дифференциальной тонометрии (и в частности эластонометрии) велики; поэтому возможность ее использования для оперированного глаза имеет принципиальное значение.

Разработанная авторами максимально простая механическая модель глазного яблока, рассматривающая роговицу как двумерную упругую поверхность [6], а склеру как нульмерный упругий элемент, была эффективно применена к анализу влияния пространственной неоднородности роговицы на механические свойства глаза в работе [7], где, в частности, рассмотрена тонометрия по Маклакову для случая неоднородной роговицы, в том числе при ослабленной апикулярной области. Оказалось, что учет неоднородности заметно влияет на существенные для диагностики результаты расчетов лишь при очень высоком ее уровне, не достигаемом при естественной неоднородности. Однако неоднородность, возникающая в результате операций, может оказывать на них значительное влияние.

В настоящей работе анализируется влияние присутствия искусственно ослабленных областей на механическое поведение глаза при нагружении широким плоским штампом (тонометром Маклакова). В центре внимания процедура эластонометрии и влияние неоднородностей такого рода на определяемую при этой процедуре характеристику – коэффициент эластоподъема. Сравняются два качественно различных случая локализации ослабленной области – апикулярной и периферической – соответствующих операциям, направленным на коррекцию миопии и гиперметропии соответственно. Применяемый метод позволяет наглядно оценивать следствия различных гипотез, что отличает его от громоздких вычислительных методик, для которых такая наглядность отсутствует.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В соответствии с развитаемым авторами подходом будем рассматривать глазное яблоко как заполненный несжимаемой жидкостью с давлением  $p$  объем, состоящий из двух частей – роговицы (на рис. 1, *a* выше плоскости  $AB$ ) и склеральной области, включающей склеру и прилегающие к ней ткани (ниже плоскости  $AB$ ). Роговица рассматривается как материальная поверхность, т.е. слой нулевой толщины, а склеральная область – как упругий элемент, деформация которого характеризуется только объемом находящейся в нем жидкости. Поверхность предполагается безмоментной, т.е. не сопротивляющейся изгибу, изотропной и линейно упругой, однако неоднородной пространственно, т.е. ее упругие константы зависят от положения на поверхности. Распределение значений этих констант, тем не менее, симметрично относительно оси, что позволяет рассматривать задачу как осесимметричную.

В [7] показано, что в предположении малых деформаций (но не обязательно малых перемещений) для неоднородной в тангенциальном направлении поверхности сохраняется форма уравнений, совпадающая с уравнениями для пространственно однородной роговицы. Имеется единственное отличие: упругие модули являются теперь функциями расстояния соответствующей точки от апекса по большой дуге. Система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет, таким образом, вне контакта со штампом (тонометром) вид

$$\begin{aligned} (r_0 T_1)' - T_2 \cos \varphi &= 0, \\ -T_2 \sin \varphi - r_0 \varphi' T_1 + \lambda r_0 p &= 0, \\ r' &= \lambda \cos \varphi, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\lambda = 1 + \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2 = \frac{r}{r_0} - 1, \quad r_0 = R_c \sin \varphi_0, \quad \varphi_0 = \frac{s}{R_c},$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E_c^*} [T_1 - \nu_c T_2 - T_0(1 - \nu_c)], \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E_c^*} [T_2 - \nu_c T_1 - T_0(1 - \nu_c)],$$

где  $r$  – расстояние точки поверхности, представляющей роговицу, от оси;  $\varphi$  – угол между нормалью к этой поверхности и осью симметрии;  $s$  – длина дуги образующей роговицы, отмеряемая от точки пересечения роговицы с осью симметрии (апекса).

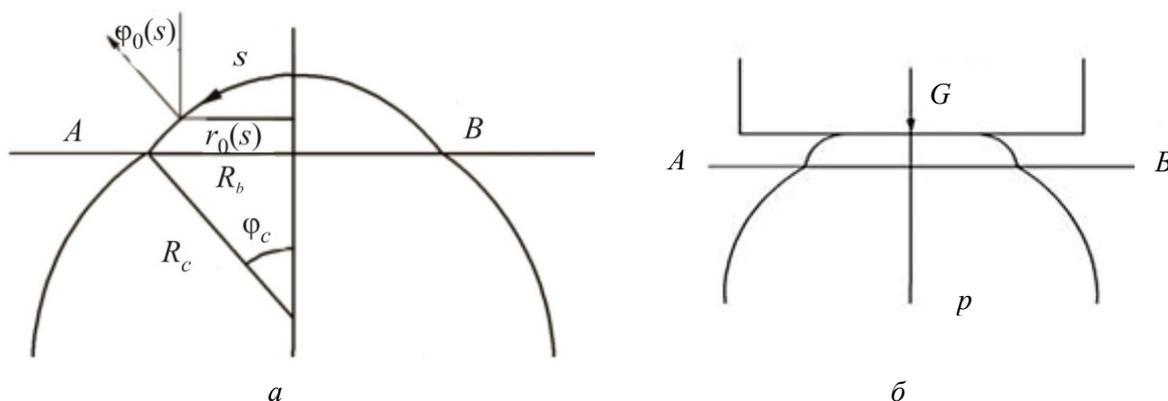


Рис. 1. К постановке задачи: *a* – глазное яблоко до нагружения; *б* – роговица, нагруженная тонометром Маклакова. Обозначения в тексте

Величина  $s$  (длина дуги в начальном состоянии) рассматривается как сопутствующая координата и играет роль независимой переменной. Другие обозначения:  $T_1$  и  $T_2$  – касательные усилия в меридиональном и перпендикулярном к нему (окружном) направлениях;  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  – деформации в направлениях главных осей, отсчитываемые от начального состояния ненагруженной извне роговицы. Последнее условно считается соответствующем некоторому сферическому пространственно однородному сегменту радиуса  $R_c$  (радиус роговицы) с внутренним давлением  $p_0$ . В силу малости деформаций это, вообще говоря, не реализуемое состояние мало отличается от любого реализуемого (и, вообще говоря, неоднородного) состояния ненагруженной извне роговицы при том же давлении. В этом состоянии  $T_1 = T_2 = T_0 = p_0 R_c / 2$ .

При симметричном относительно оси наложении широкого штампа (тонометра) в предположении свободного проскальзывания система уравнений для роговицы имеет тот же вид (1) с исключением второго уравнения этой системы, заменяемого геометрической связью  $\varphi = 0$ .

Приращение «подроговичного» объема  $\Delta V_c$  (над плоскостью  $AB$ ) связано с приращением всего заполненного жидкостью внутриглазного объема  $\Delta V$  соотношениями

$$\Delta V_s = K(p - p_0), \quad \Delta V = \Delta V_c + \Delta V_s, \quad (2)$$

где  $\Delta V_s$  – приращение «склерального» объема (под  $AB$ ).

Переобозначим упругие константы, присутствующие в (1), по формулам  $E_c^* = \delta E_c$ ,  $K = (\zeta E_s)^{-1}$ , где  $\delta = 0,5$  мм – средняя в норме толщина роговицы, а  $\zeta = 1,44 \cdot 10^{-5}$  мм<sup>-3</sup>. Физический смысл такого переобозначения подробно обсуждается в [6]. Будем называть  $E_c$  и  $E_s$  роговичной и склеральной жесткостями соответственно, а  $\nu_c$  – коэффициентом Пуассона представляющей роговицу поверхности.

В силу симметрии решение задачи ищется в области  $0 \leq s \leq s_*$ , где  $s_* = \varphi_c R_c$  – значение координаты  $s$  на границе роговицы и склеры (в лимбе). Граничные условия подробно рассмотрены в [6] и включают условие  $r(s_*) = R_b$  (жесткое закрепление роговицы на склере), условие ограниченности усилия  $T_1$  в апексе, а также выполнение соотношения

$$G = \pi r^2 \cdot p \quad (3)$$

при неизвестном заранее значении  $s$ , соответствующем отрыву роговицы от штампа, где  $G$  – вес груза, и непрерывность функций  $T_1(s)$ ,  $\varphi(s)$  и  $r(s)$ .

Оценка пределов приложимости развиваемого подхода к задаче о плоском штампе для безмоментной оболочки с заметно меняющимся в сравнении с ее толщиной профилем внешней поверхности (а значит, и с сильно меняющейся толщиной) нуждается в специальном исследовании. Необходимость такого исследования, которое в настоящее время авторами проводится, возникает в связи с тем, что на практике значение  $r$  в условии (3) определяется не для оболочки в среднем, а именно для внешней поверхности. Уже полученные результаты показывают, что в практически важных случаях использование рассмотренной выше модели допустимо.

В настоящей работе решается задача о тонометрии по Маклакову, т.е. при симметричном наложении широкого плоского штампа на роговицу и постоянном суммарном объеме внутриглазной жидкости  $\Delta V = 0$ .

При расчетах будем полагать  $R_c = 8$  мм,  $R_b = 5,8$  мм, что соответствует стандартным для человеческого глаза значениям. Далее независимую переменную  $s$  (длина дуги образующей) будем обезразмеривать по радиусу роговицы  $R_c$ , сохраняя для этой величины прежнее обозначение. При принятых значениях геометрических параметров роговицы  $s_* \approx 0,8$ . Для коэффициента Пуассона принималось значение  $\nu_c = 0,45$ . Склеральная жесткость во всех расчетах считалась равной ее среднему для нормальных глаз человека значению  $E_s = 10$  МПа [6].

Жесткость роговицы  $E_c(s)$  варьировались в диапазоне 0,1–0,8 МПа, и рассматривались два типа ее изменения по дуге большого круга. Первый вариант моделирует резкое ослабление прочности роговицы в области, прилегающей к апексу (рис. 2, *а*). Это распределение соответствует удалению в некоторой центральной зоне части материала роговицы, прилегающей к ее внешней поверхности. Такое удаление имеет место при операциях, корректирующих миопию [1]. Вторым вариантом (см. рис. 2, *б*) моделирует резкое ослабление роговицы в ограниченной области, лежащей между апексом и лимбом. Этот вариант соответствует удалению прилегающего к внешней поверхности материала из такой области, что выполняется при коррекции гиперметропии. Предполагается, что до операции упругие свойства роговицы были пространственно однородны: на рис. 2 жесткость интактной роговицы соответствует участкам, примыкающим к правому концу (т.е. контакту со склерой), и равна  $E_c(s_*)$ .

Вес штампа (тонометра) варьировался от 5 до 15 г. Границы этого интервала соответствуют минимальному и максимальному весу в стандартном наборе грузов, применяемых при тонометрии по Маклакову.

В числе физически существенных характеристик распределения  $E_c(s)$ : жесткость интактной роговицы  $E_c(s_*)$  и среднее значение жесткости. Последнее можно вводить различно. Если не оговорено, под средним понимается среднее интегральное значение по длине дуги  $\langle E_c \rangle$ . Именно это значение использовалось в работе [7].

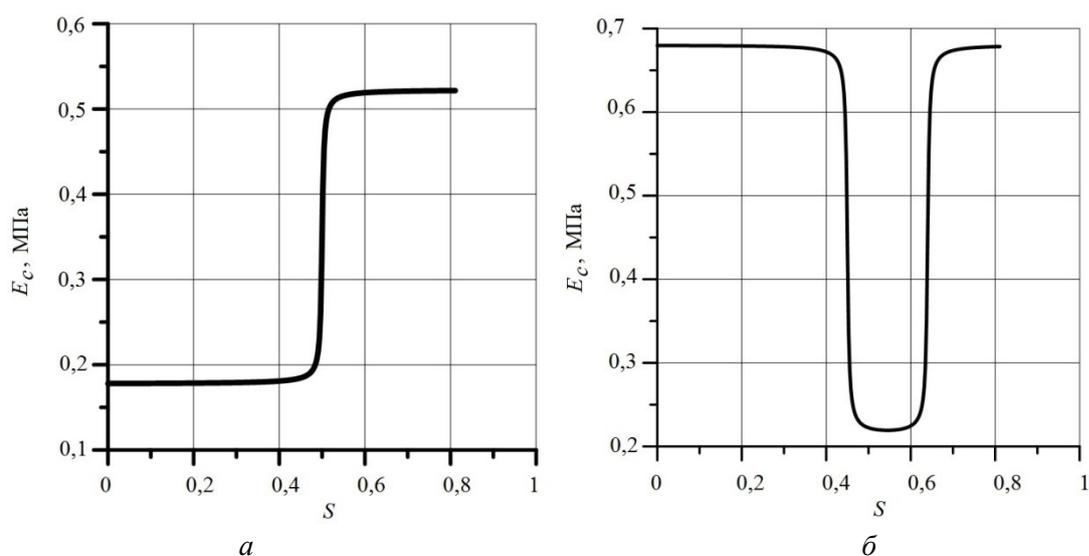


Рис. 2. Общий вид зависимостей эффективной жесткости роговицы  $E_c$  от характеризующего положение на роговице безразмерного параметра  $s$  при радикальном ослаблении апикальной зоны (*а*) и кольцевой области на периферии (*б*) в первоначально однородной роговице

Когда далее говорится о среднем значении жесткости без уточнений, имеется в виду  $\langle E_c \rangle$ . Возможно рассматривать и, например, среднее интегральное по площади поверхности роговицы  $\langle\langle E_c \rangle\rangle$ . Как будет видно из дальнейшего, выбор определения среднего достаточно заметно влияет на некоторые результаты. Математически упомянутые средние определены формулами

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{S_*} \int_0^{s_*} E_c(s) ds, \quad \langle\langle E_c \rangle\rangle = \frac{1}{S} \int_0^{s_*} E_c(s) \cdot 2\pi r_0(s) ds, \quad (4)$$

где  $S$  – площадь поверхности сферического сегмента, представляющего роговицу в начальном состоянии, а координата  $r = r_0$  определяется как функция  $s$  для этого состояния в соответствии с (1).

В качестве основной характеристики, отражающей степень неоднородности роговицы, выберем амплитуду жесткости  $\Delta E_c$ , т.е. разницу между ее максимальным при  $s = s_*$  (на границе со склерой) и минимальным значениями. В случае ослабленной центральной зоны (см. рис. 2, а) минимальное значение жесткости достигается при  $s = 0$  (в апексе) и  $\Delta E_c = E_c(s_*) - E_c(0)$ . При периферическом ослаблении (см. рис. 2, б) минимальное значение жесткости имеет место в некоторой внутренней точке отрезка  $[0, s_*]$ . Важна еще локализация перехода между характерными жесткостями, в первую очередь между уменьшенной и интактной. Для апикального ослабления роговицы (см. рис. 2, а) эта локализация характеризуется одним пограничным значением  $s = s_{r1} = D/2$  ( $D$  – измеренный по дуге диаметр ослабленной зоны). В случае ослабления нецентральной зоны (рис. 2, б) локализация ослабления определяется двумя параметрами:  $s = s_{r1} = D_1/2$  и  $s = s_{r2} = D_2/2$ , где  $D_1$  и  $D_2$  – внутренний и внешний диаметры ослабленной зоны соответственно. Типичные радиусы зоны ослабления жесткости равны при выполнении операций по коррекции миопии  $D/2 = 0,55$  (4,3 мм), при коррекции гиперметропии  $D_1/2 = 0,45$  (3,2 мм) и  $D_2/2 = 0,64$  (4,6 мм). Расчеты показывают, что наклон переходных между зонами кривых несуществен. При моделировании ослабления в центральной зоне любые три из названных четырех характеристик ( $E_c(s_*)$ ,  $\langle E_c \rangle$ ,  $\Delta E_c$ ,  $D_1$ ) независимы. В случае ослабления кольцевой периферической зоны их четыре из набора  $E_c(s_*)$ ,  $\langle E_c \rangle$ ,  $\Delta E_c$ ,  $D_1$ ,  $D_2$ .

Методику численного решения см. в [6].

### **СРАВНИТЕЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛАСТОНОМЕТРИИ ПО МАКЛАКОВУ ДЛЯ РОГОВИЦЫ, ОСЛАБЛЕННОЙ В ЦЕНТРАЛЬНОЙ И ПЕРИФЕРИЧЕСКОЙ ЗОНАХ**

Процедура эластонометрии состоит в последовательном нагружении роговицы глаза широкими плоскими штампами (тонометрами Маклакова) разного веса и измерении формирующихся при этом давлений (называемых тонометрическими, в отличие от давления до нагружения – «истинного»). Для роговицы как безмоментной поверхности тонометрическое давление  $p_t$  определяется в соответствии с соотношением (3) (формула Имберта–Фика).

Рассчитанные кривые давление – вес штампа  $p_t(G)$  оказались, как и в случае однородной роговицы, близки к прямым, по крайней мере в практически существенной области значений. Заметное отклонение от прямолинейности, обнаруженное при

расчетах на трехмерной конечно-элементной модели в [8], связано с достаточно произвольным выбором этой модели, что делает сопоставление затруднительным.

Практическая прямолинейность зависимости  $p_i(G)$  позволяет ввести [6] в качестве характеристики конкретного глаза коэффициент наклона этой прямой  $\gamma$ , названный коэффициентом эластоподъема. Коэффициент эластоподъема зависит от упругих характеристик роговицы и склеры, а также от истинного давления  $p_0$ .

На рис. 3 представлены зависимости коэффициента эластоподъема в случае ослабленной апикальной зоны от средней жесткости роговицы (рис. 3, а) и от радиуса этой зоны (рис. 3, б) при двух различных амплитудах неоднородности. Кривые приближены ортогональными полиномами, чтобы исключить мелкомасштабные по аргументу вариации функций. Разные диапазоны изменения аргумента на рис. 3, а связаны с чисто арифметическими ограничениями на параметры распределения жесткости. Видно, что зависимость от средней жесткости ведет себя иначе, чем для однородной роговицы с той же жесткостью. В физиологически существенной области значений эта зависимость оказывается существенно немонотонной, возрастая при малых значениях  $\langle E_c \rangle$  и убывая при достаточно больших, тогда как при однородной жесткости расчет дает при малых  $E_c$  почти не различимое возрастание коэффициента эластоподъема, за которым следует убывание, а при достаточно больших истинных давлениях возрастающий участок вообще исчезает [6]. Аналогичное немонотонное поведение имеет место и для зависимости  $\gamma(D/2)$ . Максимум кривых тем более выражен, чем больше амплитуда жесткости  $\Delta E_c$ , а при фиксированной  $\Delta E_c$  становится заметней с убыванием интактной жесткости  $E_{c0}$ . Максимум кривой  $\gamma(D/2)$  там, где он выражен, достигается при близких значениях радиуса ослабленной зоны  $D/2 \sim 0,45-0,5$  (для разных значений параметров). Для сравнения, минимальный

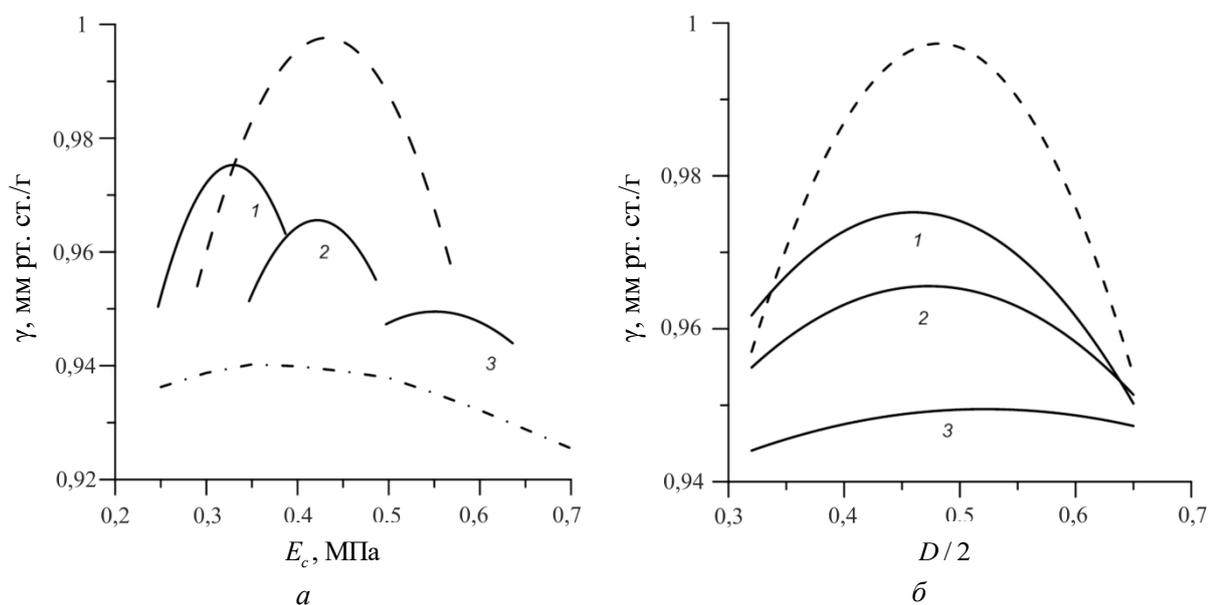


Рис. 3. Зависимость коэффициента эластоподъема  $\gamma$  для неоднородной, апикально ослабленной роговицы от ее средней жесткости (а) и радиуса зоны ослабления (б) при  $\Delta E_c = 0,68$  (пунктирные кривые, интактная жесткость  $E_{c0} = 0,84$ ) и  $\Delta E_c = 0,35$  (кривые 1 –  $E_{c0} = 0,52$ , 2 –  $E_{c0} = 0,62$ , 3 –  $E_{c0} = 0,77$ ). Зависимость  $\gamma$  от жесткости для однородной роговицы показана штрих-пунктиром (а).

Все жесткости даны в МПа. Истинное давление  $p_0 = 12$  мм рт. ст.

безразмерный радиус области контакта груза с роговицей, определяемый по формуле (3), в рассматриваемом диапазоне варьирования параметров равен 0,28 (при весе тонометра  $G=5$  г), а максимальный – 0,43 ( $G=15$  г). Таким образом, убывание кривых  $\gamma(D/2)$  соответствует ослабленному участку, перекрывающему область контакта роговицы со штампом. Отклонение от значений  $\gamma$ , соответствующих однородной жесткости, возрастает при увеличении амплитуды, а при одной и той же амплитуде растет с ростом  $\langle E_c \rangle$ , достигая максимума при некотором значении  $\langle E_c \rangle$ , близком к тому, в котором достигается максимум функции  $\gamma(\langle E_c \rangle)$ , а затем начинает падать.

На рис. 4 кривые  $\gamma(\langle E_c \rangle)$  сопоставлены для различных значений истинного давления  $p_0$  и двух значений склеральной жесткости  $E_s$ . Коэффициент эластоподъема растет с уменьшением  $p_0$  при приблизительном сохранении формы кривых  $\gamma(\langle E_c \rangle)$  и  $\gamma(D/2)$ . Он также растет с увеличением  $E_s$ , причем при возрастании склеральной жесткости точка максимума функции  $\gamma(\langle E_c \rangle)$  сдвигается вправо (в сторону больших значений  $\langle E_c \rangle$ ), так что при  $E_s=20$  МПа и  $p_0=12$  мм рт. ст. функция  $\gamma(\langle E_c \rangle)$  становится в исследуемой области значений практически монотонной (теперь возрастающей). Монотонной (убывающей) при этих значениях становится и функция  $\gamma(D/2)$ .

Разница между значениями  $\gamma$  для неоднородной при апикальном ослаблении и однородной роговиц не слишком велика: она не превышает 0,11 (11%) абсолютной величины  $\gamma$  при истинном давлении 12 мм рт. ст. и 0,15 (13%) при истинном давлении

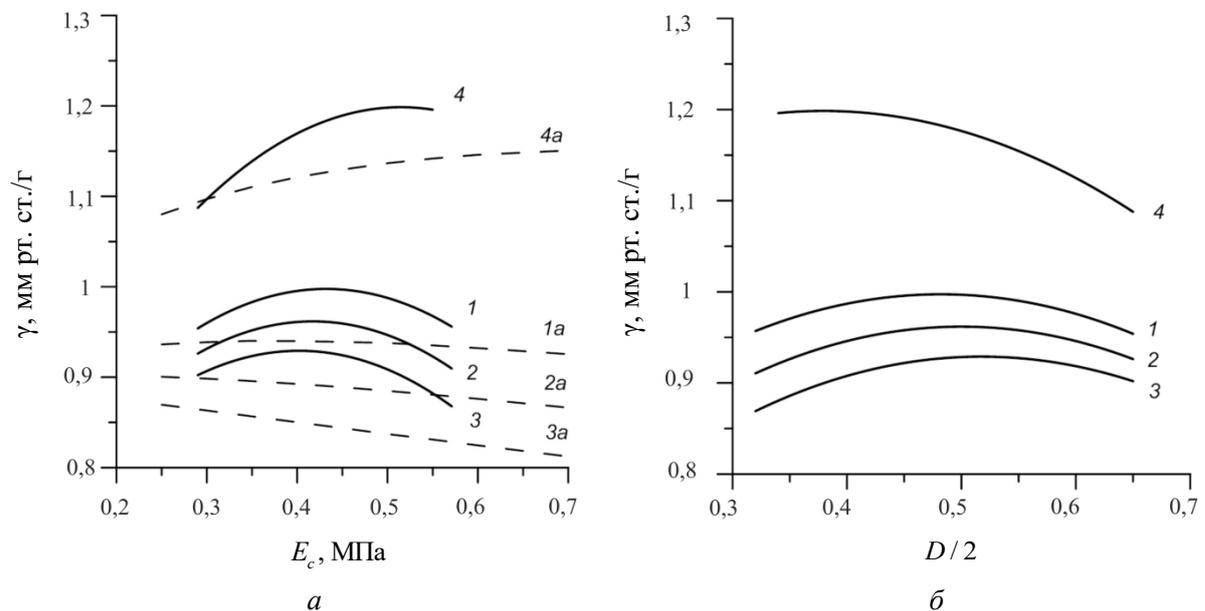


Рис. 4. Зависимость коэффициента эластоподъема  $\gamma$  от средней жесткости апикально ослабленной роговицы (а) и радиуса зоны ослабления (б) при  $\Delta E_c = 0,68$  МПа, склеральной жесткости  $E_s = 10$  МПа и истинных давлениях  $p_0 = 12$  (кривая 1), 16 (2), 20 (3) мм рт. ст., а также при склеральной жесткости  $E_s = 20$  МПа и истинном давлении  $p_0 = 12$  мм рт. ст. (кривая 4). Зависимости для однородной роговицы от ее жесткости  $E_c = \langle E_c \rangle$  при тех же значениях  $p_0$  и  $E_s$  обозначены индексом а

20 мм рт. ст. в случае  $\Delta E_c = 0,78$ , а в случае  $\Delta E_c = 0,34$  при истинном давлении 12 мм рт.ст. – 0,06 (8%). Эта разница сопоставима с вариациями коэффициента эластоподъема вследствие изменений склеральной жесткости и истинного давления, а порой и значительно меньше их. Таким образом, качественно отличающаяся от случая однородной роговицы немонотонная зависимость  $\gamma(< E_c >)$  в этом случае не слишком существенна. При умеренной амплитуде вполне можно использовать зависимость  $\gamma(E_c)$ , полученную для однородной роговицы, если понимать под  $E_c$  среднее значение жесткости  $< E_c >$ . Более того, при относительно малых значениях истинного давления ( $\sim 12$  мм рт. ст.) и близких к среднему значениях склеральной жесткости ( $\sim 10$  МПа) сама зависимость  $\gamma$  от  $E_c$ , вообще, несущественна и коэффициент эластоподъема определяется практически только  $p_0$  и  $E_s$ .

На рис. 5 представлены зависимости коэффициента эластоподъема от  $< E_c >$  и полуширины оставшегося интактного участка  $D_1/2$  при различных других параметрах распределения жесткости роговицы для случая периферического выреза. При не слишком узкой зоне ослабления (что при равенстве остальных параметров соответствует умеренным значениям  $D_1/2$ ) функция  $\gamma(< E_c >)$  ведет себя в известном смысле противоположно случаю апикального ослабления: она теперь выпукла не кверху, а книзу:  $\gamma$  сначала падает с ростом  $< E_c >$ , а затем начинает расти. Точка минимума этой функции сдвигается в сторону больших  $< E_c >$  при увеличении

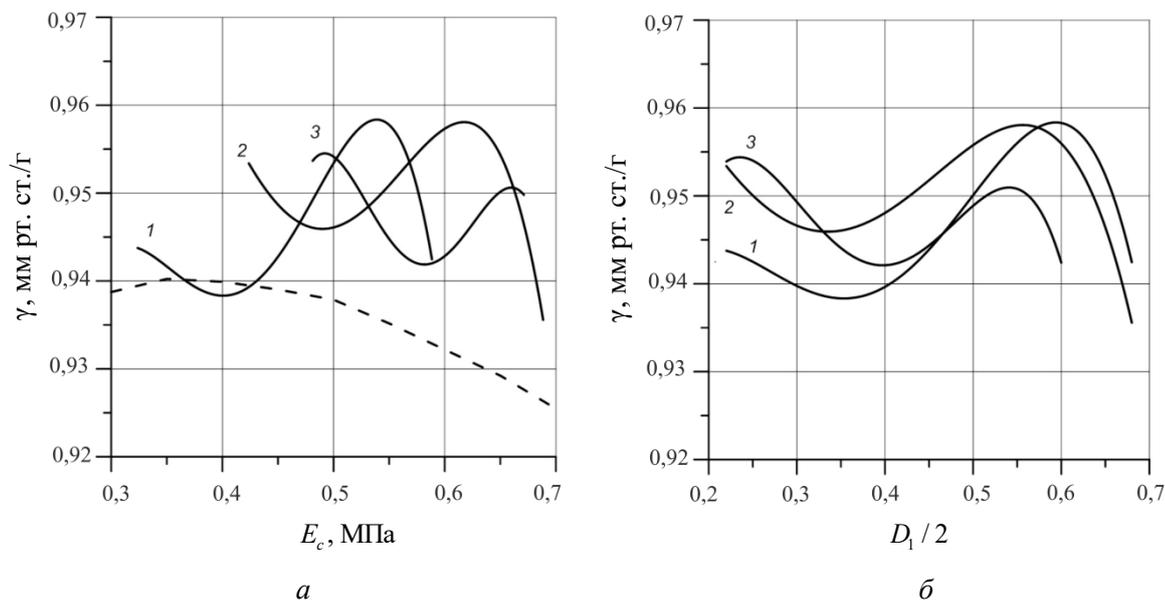


Рис. 5. Зависимость коэффициента эластоподъема роговицы, ослабленной в зоне близкой к склере, от ее средней жесткости  $< E_c >$  (а) и внутренней (ближней к апексу) границы зоны ослабления (б) при различных значениях интактной жесткости  $E_{c0} = 0,6$  (кривые 1) и  $0,7$  (кривые 2 и 3) МПа и разной локализации внешней (удаленной от апекса) границы ослабленной зоны  $D_2/2 = 0,6$  (кривые 1 и 2) и  $0,7$  (кривые 3); пунктирная кривая 4 – зависимость  $\gamma(E_c)$  для однородной роговицы (в этом случае  $E_c = < E_c >$ ). Амплитуда неоднородности, истинное давление и склеральная жесткость во всех случаях фиксированы и равны  $\Delta E_c = 0,46$  МПа,  $p_0 = 12$  мм рт. ст. и  $E_s = 10$  МПа

интактной жесткости и отдалении внешней границы зоны ослабления от границы со склерой (лимба). Однако при дальнейшем росте  $\langle E_c \rangle$  достигается максимум и функция  $\gamma(\langle E_c \rangle)$  возобновляет падение. Функция  $\gamma(D_1/2)$  выглядит аналогично. Сначала  $\gamma$  падает с ростом  $D_1/2$  (т.е. с отдалением ослабленной зоны от апекса и уменьшением ее ширины), а затем начинает расти.

При этом отклонение коэффициента эластоподъема от его соответствующего значения для однородной роговицы с тем же  $\langle E_c \rangle$  заметно меньше, чем для апикального выреза, и не превышает 2%. Из рис. 6 видно, что эти отклонения значительно меньше вариаций функции  $\gamma(\langle E_c \rangle)$  из-за вполне реалистичных вариаций склеральной жесткости  $E_s$  и истинного давления  $p_0$ .

Таким образом, неоднородностью жесткости роговицы при анализе зависимости коэффициента  $\gamma$  от этой величины можно свободно пренебрегать даже при больших ее амплитудах и пользоваться расчетной кривой для однородной роговицы с жесткостью, равной среднему значению ее распределения.

Рис. 7 демонстрирует практически полное совпадение эластонометрических кривых (зависимостей тонометрического давления от веса тонометра) в случае однородной роговицы и ослабленной в кольцевой зоне роговицы с тем же средним значением жесткости. Отличие от аналогичной зависимости для интактной роговицы

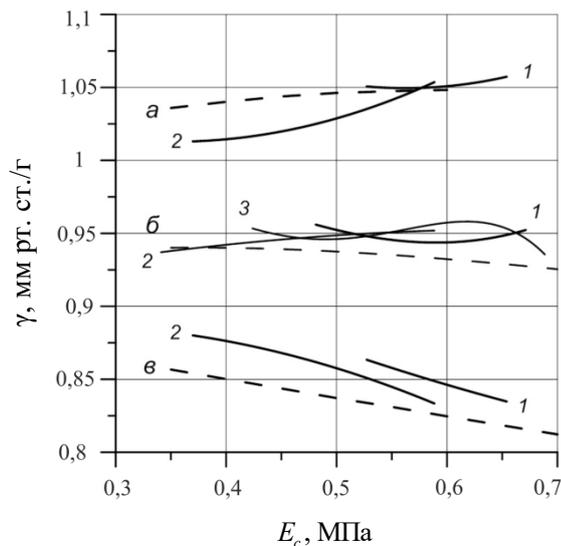


Рис. 6. Зависимость коэффициента эластоподъема роговицы, ослабленной в зоне близкой к склере, от ее средней жесткости  $\langle E_c \rangle$  при различных значениях параметров (сплошные кривые). Интактная жесткость  $E_{c0} = 0,7$  (кривые 1, 3) и 0,6 МПа (2); внешний радиус ослабленной зоны  $D_2/2 = 0,6$  (1, 2) и 0,7 (3). Кривые группируются в три семейства – а, б и в, различающиеся значениями склеральной жесткости  $E_s$  и истинного давления  $p_0$ : а –  $E_s = 20$  МПа,  $p_0 = 20$  мм рт. ст.; б –  $E_s = 10$  МПа,  $p_0 = 12$  мм рт. ст.; в –  $E_s = 10$  МПа,  $p_0 = 20$  мм рт. ст. Пунктирные линии – зависимость  $\gamma(E_c)$  для однородной роговицы ( $E_c = \langle E_c \rangle$ ) при значениях  $E_s$  и  $p_0$  соответствующего семейства. Амплитуда  $\Delta E_c$  во всех случаях равна 0,46 МПа

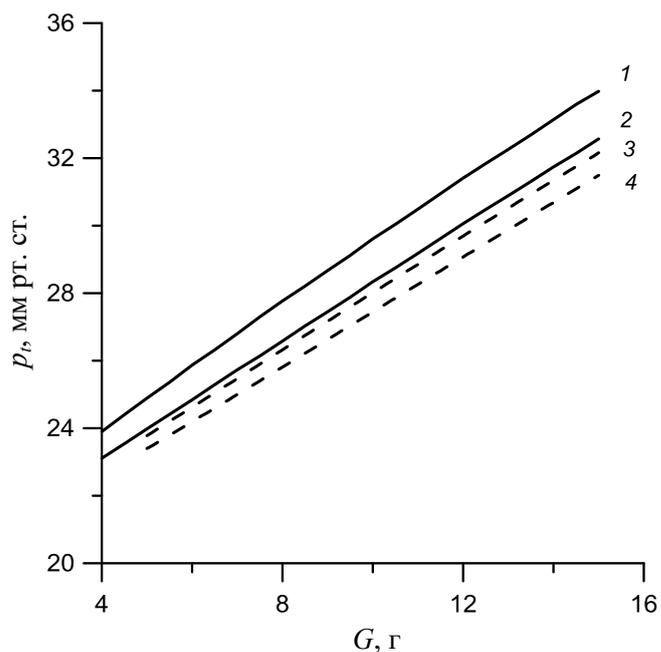


Рис. 7. Зависимость тонометрического давления от веса груза: 1 – роговица с апикально ослабленной зоной; 2 – роговица с кольцевой зоной ослабления; 3 – однородная роговица с жесткостью, равной средней; 4 – однородная роговица с жесткостью, равной интактной жесткости (до операции). Во всех случаях  $E_s = 10$  МПа,  $p_0 = 12$  мм рт. ст. Для кривых 1 и 2 средняя жесткость  $\langle E_c \rangle$  одинакова и равна 0,48 МПа

также незначительно. Таким образом, при расчете истинного давления использование соотношений, полученных для однородной роговицы с жесткостью равной интактной, дает лишь незначительную ошибку, а с жесткостью равной средней – ничтожную.

В то же время эластонометрическая кривая для апикально ослабленной роговицы располагается выше, хотя и не слишком существенно: ее подъем над линией, соответствующей среднему значению  $E_c$ , порядка 1 мм рт. ст., а над линией, соответствующей интактному  $E_c$ , – порядка 1,5 мм рт. ст. Это указывает на то, что в случае апикального ослабления при оценке истинного давления поправку, связанную с неоднородностью, все же следует учитывать.

Что касается наклона (равного коэффициенту  $\gamma$ ) линий, соответствующих неоднородной роговице, то он равен для апикального ослабления (линия 1) 0,92 мм рт. ст./г, а для периферийного (2) – 0,86 мм рт. ст./г. Для однородной роговицы с жесткостью, равной средней жесткости обоих неоднородных распределений  $\gamma = 0,84$ , а для интактной – 0,8 мм рт. ст./г. Таким образом, при апикальной неоднородности коэффициент эластоподъема отклоняется от случая «средней» роговицы незначительно, а при периферийной этим отклонением, безусловно, можно пренебречь.

Во всех расчетах, рассмотренных выше, среднее значение жесткости роговицы получено как среднее по длине дуги образующей (первая формула (4)). Использование осреднения по площади роговичного сегмента (вторая формула (4)) несколько изменяет результаты, хотя и не слишком существенно. На рис. 8 показано влияние способа осреднения.

Видно, что в случае апикального ослабления роговицы кривые, полученные при осреднении по поверхности, располагаются правее кривых с осреднением по дуге, что приводит к некоторому изменению разности между коэффициентом эластоподъема  $\gamma$

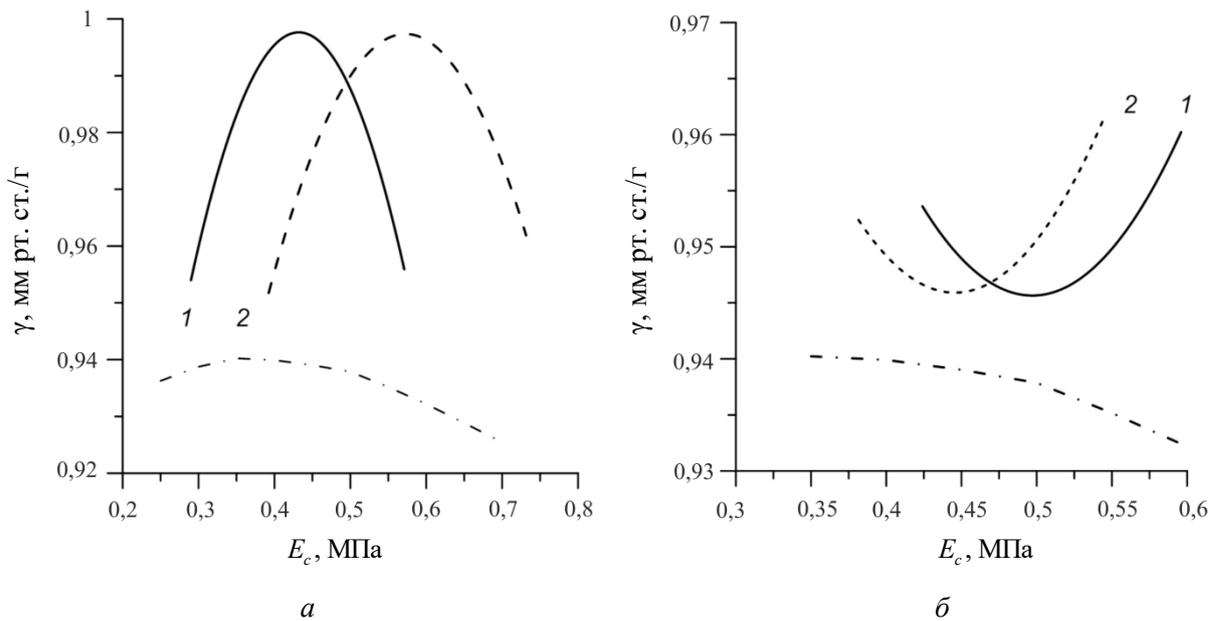


Рис. 8. Зависимость коэффициента эластоподъема от средней жесткости при разных способах осреднения: *а* – апикально ослабленная роговица; *б* – роговица, ослабленная в кольцевой области вблизи склеры. Кривые 1 – осреднение по длине дуги, 2 – по площади поверхности роговицы. Штрих-пунктир соответствует однородной роговице с той же средней жесткостью

для неоднородной и однородной роговицы с тем же средним значением. Имеется пороговое значение жесткости роговицы, ниже которого эта разность меньше, чем при осреднении по дуге, а выше оказывается больше. В случае ослабления в кольцевой зоне взаимное расположение кривых противоположно, но в зоне вогнутости кривой  $\gamma(\langle E_c \rangle)$  (именно она показана на рис. 8, б) поведение упомянутой разности качественно такое же. Способ осреднения не влияет ни на форму кривых  $\gamma(\langle E_c \rangle)$ , ни на их взаимное расположение при тех же значениях параметров, например, на рис. 6.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Численно изучено влияние искусственно вызванного ослабления жесткости роговицы глаза на физический смысл результатов эластонометрии по Маклакову. Проведенное исследование свидетельствует о незначительном отклонении значений коэффициента эластоподъема для неоднородной роговицы от значения этого коэффициента для однородной роговицы при ее умеренной жесткости. Это отклонение невелико при сравнении с измерением на интактной роговице и еще заметно меньше, если для сравнения выбирается однородная роговица с той же средней жесткостью. При этом способ осреднения (по длине дуги образующей или по площади поверхности) влияет на результат незначительно. При ослаблении роговицы в апикальной зоне такое отличие не превышало 13%, а при ослаблении в кольцевой зоне, близкой к склеральному кольцу, – 2%. Эта разница сопоставима с вариациями коэффициента эластоподъема вследствие изменений склеральной жесткости и истинного давления, а порой и значительно меньше их. Таким образом, к прооперированным глазам с исходно

умеренно жесткой роговицей можно применять как известные ранее, так и предложенные нами [5] методики клинической оценки результатов эластонометрии.

Наши предварительные расчеты, однако, показывают, что использование этих методик при обследовании глаз с очень жесткой роговицей может привести к значительным ошибкам. Между тем, по современным данным, жесткость корнеосклеральной оболочки, включая роговицу, при глаукоме может существенно возрастать [5, 12]. Изучение особенностей тонометрии и эластонометрии для таких глаз представляет собой отдельную задачу, которая требует подробного исследования.

### БЛАГОДАРНОСТИ

Работа поддержана РФФИ (проект № 17-01-00380).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балашевич Л.И. Рефракционная хирургия. – СПб.: Изд. дом СПбМАПО, 2002. – 285 с.
2. Бауэр С.М., Любимов Г.А., Товстик П.Е. Математическое моделирование метода Маклакова измерения внутриглазного давления // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2005. – № 1. – С. 24–39.
3. Иомдина Е.Н., Бауэр С.М., Котляр К.Е. Биомеханика глаза: Теоретические аспекты и клинические приложения. – М.: Реал Тайм, 2015. – 208 с.
4. Любимов Г.А., Моисеева И.Н., Штейн А.А. О повышении информативности теста тонометрии // Глаукома. – 2015. – Т. 14, № 4. – С. 58–65.
5. Любимов Г.А., Моисеева И.Н., Штейн А.А., Иомдина Е.Н., Арчаков А.Ю., Киселева О.А. О возможности использования параметров, характеризующих упругие свойства корнеосклеральной оболочки глаза, для диагностики ее измененного механического состояния при первичной открытоугольной глаукоме // Российский журнал биомеханики. – 2018. – Т. 22, № 1. – С. 8–18.
6. Моисеева И.Н., Штейн А.А. Анализ зависимости давления – объем для глазного яблока, нагруженного плоским штампом, на основе двухсегментной упругой модели // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2011. – № 5. – С. 3–15.
7. Моисеева И.Н., Штейн А.А. Влияние пространственной неоднородности роговицы на деформационные свойства глазного яблока и результаты аппланационной тонометрии по Маклакову // Биофизика. – 2017. – Т. 62, № 6. – С. 1193–1203.
8. Bauer S.M., Venatovskaya L.A. Analysis of stress-strain state of a human eye by the method of elastotonometry after the surgical correction of hyperopia // AIP Conf. Proc. – 2018. – Vol. 1959. – 090001. – P. 1–5.
9. Corneal biomechanics and refractive surgery / Ed. F.A. Guarnieri. – Berlin: Springer, 2015. – 146 p.
10. Fernandez D.C., Niaz A.M., Kurtz R.M., Djotyan G.P., Juhasz T. Finite element analysis applied to cornea reshaping // J. Biomed. Opt. – 2005. – Vol. 10, № 6. – 064018. – P. 1–11.
11. Hjortdal J.Ø. Regional elastic performance of the human cornea // J. Biomech. – 1996. – Vol. 29, № 7. – P. 931–942.
12. Liu B., McNally S., Kilpatrick J.I., Jarvis S.P., O'Brien C.J. Aging and ocular tissue stiffness in glaucoma // Surv. Ophthalmol. – 2018. – Vol. 63, № 1. – P. 56–74.
13. Pinsky P.M., Datye D.V. A microstructurally based finite element model of the incised human cornea // J. Biomech. – 1991. – Vol. 24, № 10. – P. 907–922.
14. Reichel E., Miller D., Blanco E., Mastanduno R. The elastic modulus of central and perilimbal bovine cornea // Ann. Ophthalmol. – 1989. – Vol. 21. – P. 205–208.
15. Shin T.J., Vito R.P., Johnson L.W., McCarey B.E. The distribution of strain in the human cornea // J. Biomech. – 1997. – Vol. 30, № 5. – P. 497–503.

## MATHEMATICAL MODELLING OF MAKLAKOFF ELASTOTONOMETRY IN THE CASE OF ARTIFICIALLY CREATED CORNEA INHOMOGENEITY

I.N. Moiseeva, A.A. Stein (Moscow, Russia)

The mechanical response of the eye to cornea loading by wide flat stamps of different weights (Maklakoff elastotometry) is studied in the case of artificially created strong inhomogeneity of the elastic properties of the cornea, which is formed due to vision correction surgery. The weakening of the cornea in the apical region or in the peripheral annular zone that lies a short distance from the sclera but is not adjacent to it is considered. The first case corresponds to correction of myopia and the second one to that of hyperopia. The cornea is modeled by a momentless, linearly elastic surface and the scleral region by an elastic reservoir that responds to changes in volume by changes in pressure. Within this representation, the mechanical properties of the cornea are characterized by the effective stiffness, a parameter that reflects both the elastic properties of the cornea material and the corneal thickness. It is shown that for moderate corneal stiffness the dependence of the tonometric pressure on the tonometer weight remains, similar to the case of homogeneous cornea, almost linear, which makes it possible to introduce the pressure difference coefficient as the slope of the corresponding straight line. The dependence of this coefficient on parameters that characterize the distribution of the elastic properties of the cornea is studied for various true pressures and scleral stiffnesses. The corneal inhomogeneity effect turned out to be qualitatively different for apical and peripheral weakening but insignificant. In the latter case, the effect is less expressed and, moreover, practically indiscernible. Thus, for operated eyes with moderately stiff corneas, the earlier developed methods of clinical estimation of elastotometry results can be used.

**Key words:** eye, mathematical models, corneoscleral coat, elastic properties, intraocular pressure, elastotometry, differential tonometry, Maklakoff tonometer, inhomogeneity of the elastic properties of the cornea, vision correction surgery.

*Получено 31 августа 2018*