



Научная статья

DOI: 10.15593/RZhBiomeh/2022.4.01

УДК 531/534: [57+61]

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ТОНОМЕТРИЯ ТОНОМЕТРОМ ШИОТЦА: МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ С УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНОСТИ УПРУГОГО ПОВЕДЕНИЯ РОГОВИЦЫ И СОПОСТАВЛЕНИЕ С КЛИНИЧЕСКИМИ ДАННЫМИ

И.Н. Моисеева, А.А. Штейн

Институт механики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 31 августа 2022

Одобрена: 09 октября 2022

Принята к публикации: 10 декабря 2022

#### Ключевые слова:

глаз, роговица, нелинейность упругих свойств, дифференциальная тонометрия, тонометр Шиотца, математические модели.

### АННОТАЦИЯ

Выполнено математическое моделирование диагностической процедуры дифференциальной тонометрии, основанной на нагружении глаза тонометром Шиотца с использованием двух или более весов плунжера – одного из двух конструктивных элементов этого тонометра. Используется разработанная ранее авторами модель глазного яблока, основанная на представлении роговицы безмоментной двумерной упругой поверхностью, а склеральной области – нульмерным упругим элементом, отвечающим изменением давления на изменение объема содержащейся в нем жидкости. В отличие от предшествующих работ, в которых выполнялось теоретическое исследование дифференциальной тонометрии на основе физически линейной модели роговицы, учитывается нелинейность ее упругого поведения на основе эффективного подхода, позволившего описывать эту нелинейность посредством единственного параметра. Показано, что зависимость тонометрического давления от веса плунжера остается практически линейной, что дает возможность вводить коэффициент эластоподъема  $\gamma$  как наклон соответствующей прямой. Этот коэффициент растет с увеличением как склеральной, так и роговичной жесткостей и падает с ростом истинного давления. Учет нелинейности приводит к увеличению расчетных значений  $\gamma$  при достаточно больших как истинных давлениях, так и жесткостях обоих компонентов глазного яблока, а также к расширению области давлений, для которых эти значения велики. Показано, что можно выделить две группы глаз, в одной из которых, характеризующей большими значениями коэффициента эластоподъема, оба компонента корнеосклеральной оболочки очень жесткие, а в другой, где эти значения существенно ниже, жесткость тканей глаза можно считать нормальной. При этом остается промежуточная область значений  $\gamma$ , для которой столь определенные выводы только по результату дифференциальной тонометрии сделать нельзя. Однако возможность выделения группы «очень жестких» глаз, для которых особенно велика вероятность глаукомы, делает эту процедуру полезной при диагностике этого заболевания.

© ПНИПУ

### Введение

Уже в первой половине прошлого века, на заре развития тонометрии, стало ясно, что показания тономет-

ров сильно зависят от упругих свойств глазных тканей, которые значительно различаются для разных глаз. Тогда же была сформулирована задача: разработать методику оценки этих свойств на основе неинвазивных кли-

© Моисеева Ирина Никитична – к.ф.-м.н., старший научный сотрудник лаборатории общей гидромеханики, e-mail: [moiseeva.ir@yandex.ru](mailto:moiseeva.ir@yandex.ru) ID: 0000-0003-4154-877X

© Штейн Александр Александрович – к.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник лаборатории общей гидромеханики, e-mail: [stein.msu@bk.ru](mailto:stein.msu@bk.ru) ID: 0000-0001-9067-7717



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

нических измерений. Цель такой оценки с самого начала была двоякой: во-первых, учесть индивидуальную жесткость глазного яблока для более точного определения внутриглазного давления и, во-вторых, получить дополнительный диагностический показатель. Дело в том, что уже тогда для врачей стало ясно, что повышенная жесткость глаза коррелирует с большей вероятностью глаукомы и не менее значима для ее прогноза, чем внутриглазное давление. Для решения этой задачи были разработаны процедуры эластометрии (впоследствии переименованной в эластотонometriю) с использованием аппланационного тонометра Маклакова и дифференциальной тонометрии с использованием импрессионного тонометра Шиотца. Обе процедуры основываются на результатах нагружения роговицы несколько раз (два или более) одним и тем же тонометром, но грузами разных весов. Предполагалось, что разница между тонометрическими давлениями под фиксированной парой грузов тем больше, чем выше так называемая ригидность. Под последней подразумевалась по-разному и не слишком отчетливо определявшаяся величина, которая истолковывалась как некоторая интегральная характеристика жесткости глаза.

В настоящее время обе процедуры используются редко, во многом потому, что стала понятна неоднозначная связь их результата с жесткостью. Подробное исследование их физического смысла стало возможным, когда мы применили к изучению эластотонometriи и дифференциальной тонометрии разработанный нами эффективный подход, базирующийся на удобной в расчетах – сильно упрощенной, но тем не менее содержательной – механической модели глазного яблока, основанной на представлении роговицы безмоментной двумерной поверхностью, а склеральной области – нульмерным элементом, отвечающим изменением давления на изменение объема содержащейся в нем жидкости [4; 9]. Небольшое число подлежащих определению параметров отличает развиваемый подход от исследований, основанных на учете множества параметров, характеризующих упругие свойства глазных тканей [1; 2; 13; 21; 32]. Пространственная неоднородность этих свойств хорошо известна и составляет предмет тщательного изучения [17; 18; 25] Однако, поскольку упругие свойства сильно различаются для разных глаз [33] и не могут быть заранее определены для конкретного исследуемого глаза, получаемые выводы в этом случае неизбежно сводятся лишь к общим рекомендациям. Первоначально мы считали оба компонента модели линейно упругими. В предположении изотропии и пространственной однородности роговицы как поверхности такая система характеризуется тремя упругими константами, из которых существенны две, характеризующие раздельно жесткость роговицы и склеральной области.

Было показано, что и в случае тонометра Маклакова, и в случае тонометра Шиотца зависимость тонометрического давления от веса приложенного груза близка к линейной, что делает нагружение более чем двумя

грузами информационно бессмысленным и полезным лишь для уточнения результатов. Наклон линии, представляющей эту зависимость, т.е. отношение разности давлений к разности весов (коэффициент эластоподъема) оказался существенно зависимым как от жесткостей роговицы и склеральной области, так и от давления в ненагруженном глазу (истинного давления), подлежащего определению при тонометрии. Коэффициент эластоподъема и для аппланационного, и для импрессионного тонометра всегда возрастает с жесткостью склерального объема и падает с давлением. Влияние роговичной жесткости не столь однозначно: как правило, для аппланационного тонометра ее возрастание приводит к уменьшению коэффициента эластоподъема, а для импрессионного – к его увеличению. Такой результат имеет место при соотношении между двумя жесткостями, не слишком отклоняющемся от нормы. Если же отклонение велико, зависимость коэффициента эластоподъема от роговичной жесткости может качественно меняться.

Однако тот факт, что все кратко сформулированные выше результаты получены в рамках физически линейной модели, оставляет некоторое сомнение в их окончательности. Дело в том, что и отдельно роговица [12; 15; 20], и глазное яблоко в целом [16; 19; 29; 30; 34] демонстрируют нелинейно упругое поведение, и эта нелинейность была учтена (хотя и не слишком корректно) при разработке и последующих уточнениях применяющейся в настоящее время стандартной процедуры обработки данных тонометрии по Шиотцу [22–24; 31]. Анализ влияния реальной нелинейности оказался возможен после разработки нами эффективной модели нелинейно упругой роговицы [11]. Эта модель была протестирована, и область изменения ее параметров была оценена на основании сопоставления с экспериментальными данными [10; 11]. Также показано, что нелинейностью упругого поведения склеральной области при характерных для клинических измерений давлениях можно пренебречь.

Поправки, вносимые учетом нелинейности упругого поведения роговицы в расчет внутриглазного давления по показаниям тонометра Маклакова, оценены в работе [6]. В целом они оказались не слишком значительны, как и вклад нелинейности в коэффициент эластоподъема, определяемый при эластотонometriи. Этого следовало ожидать, поскольку при тонометрии по Маклакову давление в процессе нагружения тонометром меняется в весьма узком диапазоне.

В статьях [7; 8] мы рассмотрели влияние нелинейности упругих свойств роговицы на тонометрию по Шиотцу. Для этого тонометра ситуация иная, чем для тонометра Маклакова: тонометрическое давление может превосходить истинное в два раза и более. Тем не менее влияние параметра, характеризующего нелинейность упругого поведения роговицы, на расчет истинного давления по тонометрическому оказалось умеренным и качественно влияет на его оценку лишь при достаточно больших давлениях. Однако при заметно

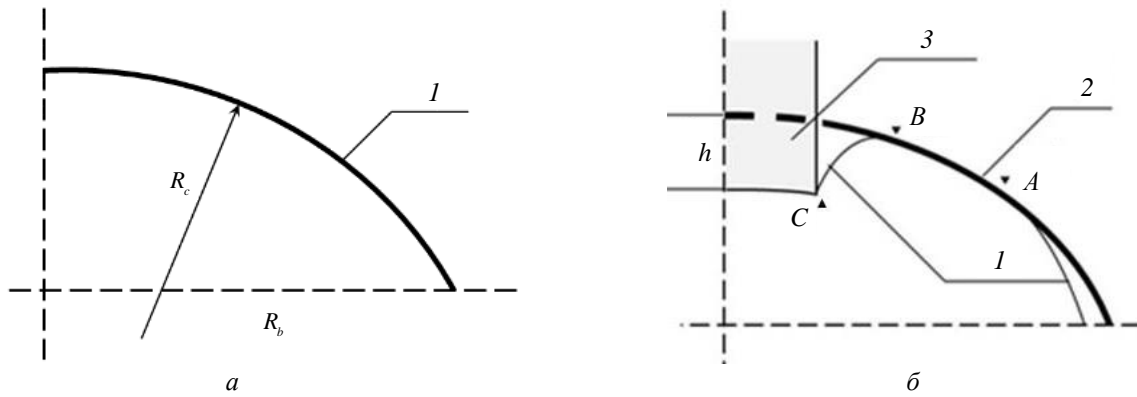


Рис. 1. К постановке задачи: роговица до внешнего нагружения (а) и нагруженная тонометром Шиотца (б); 1 – свободная роговица, 2 – вогнутый штамп (стопа), 3 – стержень (плунжер); стрелки и буквы А и В указывают точки отрыва роговицы от стопы, а С – от плунжера. На схеме показана конфигурация изучаемого объекта справа от оси симметрии (оси глаза);  $R_c$  – радиус не нагруженной извне роговицы,  $R_b$  – радиус круга, на который она опирается;  $h$  – заглубление плунжера

отклоняющихся от нормы характеристиках механических свойств и состояния глазного яблока (упругие модули, истинное давление) зависимость между истинным и тонометрическим давлениями продемонстрировала некоторые аномалии в сравнении с линейным случаем. Влияние таких аномалий, в частности, может сказаться на результатах дифференциальной тонометрии.

Последнее важно, в частности, потому, что в рамках линейной модели нам до сих пор не удавалось получить относительно высокие значения коэффициента эластоподъема (2 мм рт. ст./г и выше), которые были измерены в клинике у достаточно большого количества пациентов. Такое несоответствие теории и эксперимента затрудняло обоснование использования этого коэффициента в качестве диагностического параметра. В настоящей работе при теоретическом анализе дифференциальной тонометрии по Шиотцу, помимо учета нелинейной упругости роговицы, расширен в сравнении с нашими предыдущими исследованиями диапазон упругих параметров и истинных давлений. Это сделано для того, чтобы включить в рассмотрение область тех аномалий, о которых говорилось выше.

## Постановка задачи

Схема нагружения в импрессионном тонометре Шиотца представлена на рис. 1. Роговица глаза лежащего пациента нагружается вогнутым штампом (стопой). Через ее центральное отверстие свободно опускается стержень (плунжер) с вогнутой торцевой поверхностью, вдавливающейся в роговицу. Непосредственно измеряемая величина – заглубление плунжера под поверхность стопы.

Как показали оценки, сделанные нами ранее, в задачах тонометрии роговица демонстрирует физическую нелинейность упругого поведения при малых деформациях, а нелинейностью упругого отклика склеральной области на внутреннее давление можно пренебречь. В соответствии с этим используется система уравнений

равновесия, описывающая роговицу как двумерную безмоментную поверхность в предположении геометрической малости деформаций при конечных смещениях, которая рассматривалась ранее (см., например, соотношения (1.1) в [4]). Для роговицы принимается эффективное нелинейное определяющее соотношение [11], включающее три константы, а для склеральной области линейная связь приращений ее объема с приращениями внутреннего давления, характеризуемая одной константой – склеральной жесткостью  $E_s$ .

В качестве констант, характеризующих упругое поведение роговицы, модель рассматривает три упругих модуля: модуль растяжения (как поверхности)  $E_c^*$  и коэффициент Пуассона  $\nu_c$  для физически малых деформаций в окрестности некоторого однородного состояния, именуемого отсчетным, а также параметр нелинейности  $\zeta$ , ответственный за степень физической нелинейности. Однородное состояние было бы возможно для сферической однородной поверхности, нагруженной только внутренним давлением. Однако можно с практической точностью принять, что не нагруженная извне роговица (рис. 1, а), закрепленная по границе, имеет при некотором давлении  $p_0$  форму сферического сегмента радиуса  $R_c$ , и тогда ее напряженное состояние можно рассматривать как однородное. При другом давлении  $p'_0$  ее сферичность утратится, деформация уже не будет пространственно однородной, и тензор жесткости перестанет быть однородным и изотропным. Однако при нагружении только внутренним давлением можно пренебречь неоднородностью деформаций и изменением формы, что позволяет выбирать отсчетное состояние произвольно, считая сегмент сферическим с тем же радиусом и полагая, что упругие константы для этих состояний связаны такими же соотношениями, как для однородной деформации [11], т.е.  $\nu_c$  и  $\zeta$  не изменяются, а модуль растяжения  $E_c^*$  преобразуется по формуле

$$E_c^*(p_0') = E_c^*(p_0) + \frac{\zeta(1-\nu_c)R_c}{2}(p_0' - p_0). \quad (1)$$

Таким образом, давление, при котором форма роговичного сегмента считается сферической, может практически выбираться произвольно с пересчетом  $E_c^*$  по формуле (1). Поскольку растяжимость распертой давлением роговицы сильно зависит от этого давления, сравнивать роговицы по их упругим свойствам целесообразно при одном и том же отсчетном давлении, которое далее всегда принимается равным 12 мм рт. ст. Такое давление находится в области физиологически нормальных значений. Вместо модуля растяжения роговицы как поверхности далее рассматривается условный модуль ее материала  $E_c = E_c^* / \delta_c$ , где  $\delta_c = 0,5$  мм – характерная толщина роговицы. Значение модуля  $E_c$  всегда указывается для отсчетного давления, и его аргумент опускается. Влияние жесткостей  $E_s$  и  $E_c$  исследуется в широком диапазоне. В соответствии с оценками, выполненными в [4], под средними (нормальными) значениями этих величин понимаются  $E_s = 10$  МПа и  $E_c = 0,3$  МПа. Коэффициент Пуассона  $\nu_c$  принимается равным 0,45, что соответствует слабой сжимаемости роговицы как трехмерного объекта.

В силу симметрии решение задачи ищется в области, лежащей по одну сторону от оси симметрии ( $s \geq 0$ ). Граничные условия при нагружении тонометром Шиотца – те же, что обоснованы нами ранее [5], с учетом представленной в [6] несколько иной формы для асимптотического условия в апексе, соответствующего допущению об ограниченности усилий. Принималось также условие постоянства полного объема жидкости под оболочкой глаза за время тонометрии, т.е. сумма приращений объема под роговицей и склерального объема равна нулю.

Полагаем геометрические параметры роговицы равными их нормальным для человеческого глаза значениям:  $R_c = 8$  мм,  $R_b = 5,8$  мм. Радиусы кривизны двух компонентов тонометра Шиотца – стопы и плунжера – принимаем равными 15 мм, а вес стопы – 11 г. Это стандартные характеристики прибора.

Численное решение осуществлялось методом стрельбы с использованием схемы Рунге – Кутты четвертого порядка.

## Результаты численных расчетов

Выполненное нами численное исследование зависимости тонометрического давления  $p_t$  от веса груза  $G$  при линейно упругой роговице показало, что эта зависимость близка к линейной. Таким образом, можно ввести параметр  $\gamma$  (коэффициент эластоподъема) по формуле

$$\gamma = \frac{P_{t2} - P_{t1}}{G_2 - G_1}, \quad (2)$$

где  $P_{t1}$  и  $P_{t2}$  – тонометрические давления при весах груза (плунжера)  $G_1$  и  $G_2$  соответственно. Этот параметр естественно рассматривать как физически адекватную характеристику дифференциального нагружения роговицы, практически не зависящую от выбора значений  $G_1$  и  $G_2$ . Расчеты с учетом нелинейности упругого поведения роговицы показали, что и в этом случае линии  $p_t(G)$  остаются в практически важной области значений параметров почти прямыми. Это видно из рис. 2, на котором сопоставлены кривые  $p_t(G)$  для случаев практически линейной ( $\zeta = 1$ ) и нелинейной ( $\zeta = 60$ ) роговицы. Значение  $\zeta = 60$  было ранее оценено нами как характерное из сравнения расчетов с экспериментальными данными.

Оценка тонометрического давления по измеряемой геометрической величине – заглублению плунжера – представляет собой отдельную задачу, которая рассмотрена нами для нелинейно упругой роговицы в [7].

Далее при численных расчетах для определения  $\gamma$  применялась линейная регрессия кривой  $p_t(G)$  на участке от 4 до 8 г. Были выполнены расчеты коэффициента эластоподъема в широком диапазоне значений параметров  $E_c$ ,  $E_s$  и  $p_0$ , характеризующих механические свойства и механическое состояние глаза.

На рис. 3 показано, каким образом нелинейность роговицы влияет на зависимость коэффициента эластоподъема от склеральной жесткости при нормальном давлении и средней жесткости роговицы. Видно, что это влияние практически отсутствует при значениях склеральной жесткости, не более чем вдвое превышающих среднее значение этой величины  $E_s = 10$  МПа. Независимо от степени нелинейности роговицы, с возрастанием склеральной жесткости коэффициент  $\gamma$  растет. При  $E_s > 20$  МПа этот коэффициент увеличивается при увеличении параметра нелинейности, и тем значительнее, чем выше  $E_s$ . В случае нелинейной роговицы при достаточно больших  $E_s$  достигаются высокие значения  $\gamma$ , которые не могут быть получены для тех же значений  $E_c$  и  $p_0$  ни при каких значениях  $E_s$  для линейно упругой роговицы.

Из рис. 4 видно, что, как и для случая линейно упругой роговицы [9], увеличение не только склеральной но и роговичной жесткости ведет к росту значений коэффициента эластоподъема  $\gamma$ . Этот коэффициент существенно зависит также от истинного давления  $p_0$ , как правило, уменьшаясь с его ростом. Скорость этого уменьшения нарастает с ростом  $p_0$ . Кривые  $\gamma(p_0)$ , представленные на рис. 4, б, становятся все более пологими при уменьшении  $p_0$  и при достаточно больших роговичной и склеральной жесткостях коэффициент  $\gamma$  в области низких и нормальных значений  $p_0$  практически

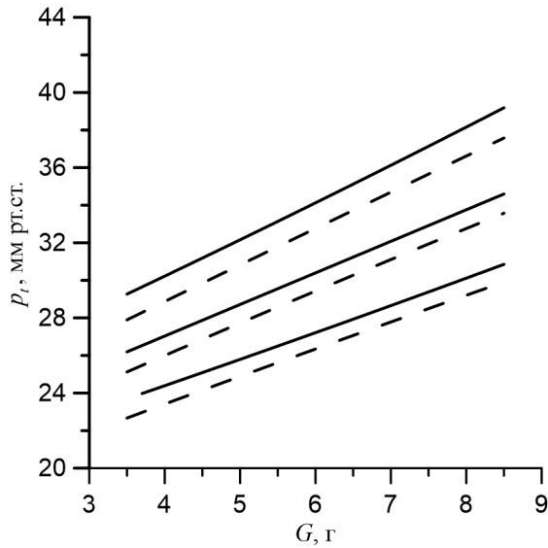


Рис. 2. Зависимость тонометрического давления  $p_t$  от веса плунжера при  $\zeta = 1$  (штриховые линии) и 60 (сплошные линии) для  $p_0 = 12$  мм рт. ст.,  $E_c = 0,6$  МПа и различных значениях склеральной жесткости  $E_s = 10, 20$ , и  $60$  МПа (чем выше линия, тем больше значение  $E_s$ )

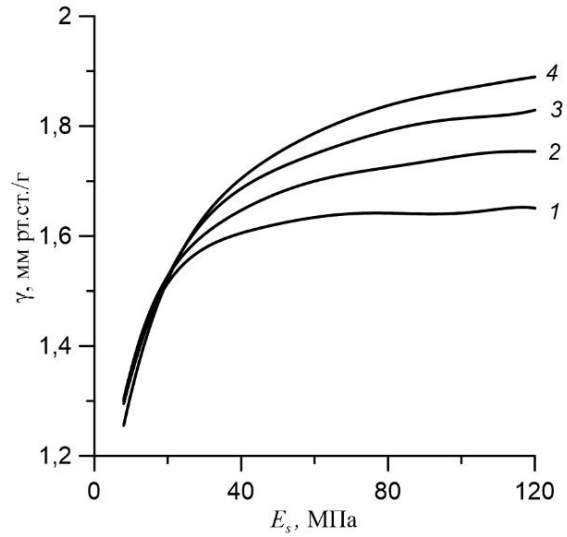
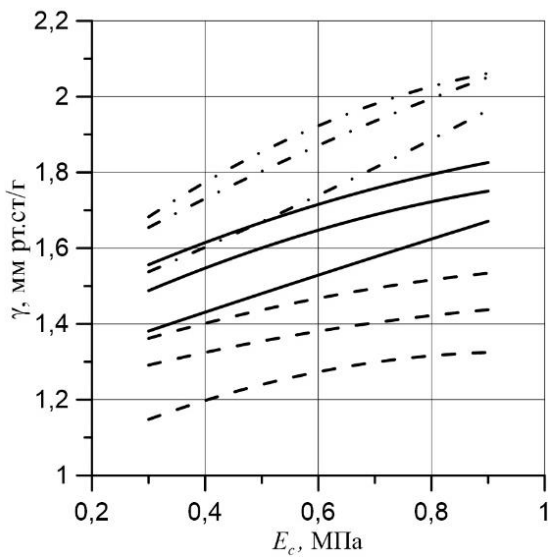
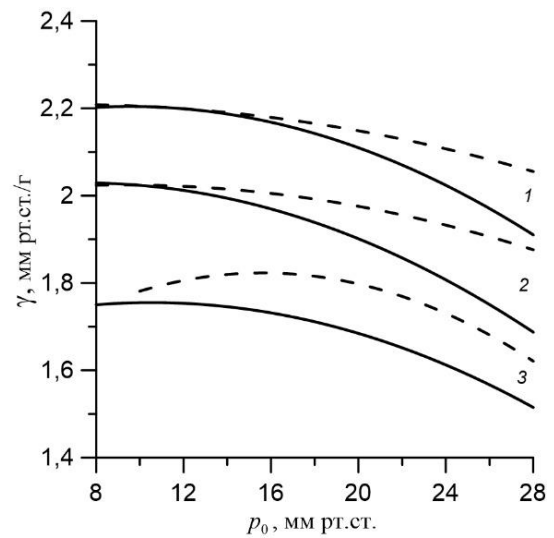


Рис. 3. Зависимость коэффициента эластоподъема  $\gamma$  от склеральной жесткости  $E_s$  для различных значений коэффициента нелинейности  $\zeta = 1, 30, 60$ , и  $90$  (кривые 1, 2, 3 и 4 соответственно);  $p_0 = 12$  мм рт. ст.;  $E_c = 0,3$  МПа



*a*



*б*

Рис. 4. Влияние обеих жесткостей и истинного давления на величину эластоподъема: *a* – три семейства кривых различаются склеральной жесткостью: снизу вверх  $E_s = 10, 20$  и  $40$  МПа; в каждом семействе снизу вверх падает истинное давление:  $p_0 = 22, 16$  и  $10$  мм рт. ст.;  $\zeta = 60$ ; *б* – три семейства кривых различаются отсчетной роговичной жесткостью: снизу вверх  $E_c = 0,3$  (3),  $0,6$  (2) и  $0,9$  (1) МПа; в каждом семействе нижняя (сплошная) кривая соответствует  $\zeta = 60$ , верхняя (штриховая) –  $\zeta = 90$ ;  $E_s = 60$  МПа

перестает от  $p_0$  зависеть. Этот эффект становится более выраженным с возрастанием параметра нелинейности. При большом  $\zeta$  и не слишком высокой (например, нор-

мальной) жесткости роговицы возможно даже существование области истинных давлений  $p_0$ , в которой с ростом  $p_0$  коэффициент  $\gamma$  может возрастать.

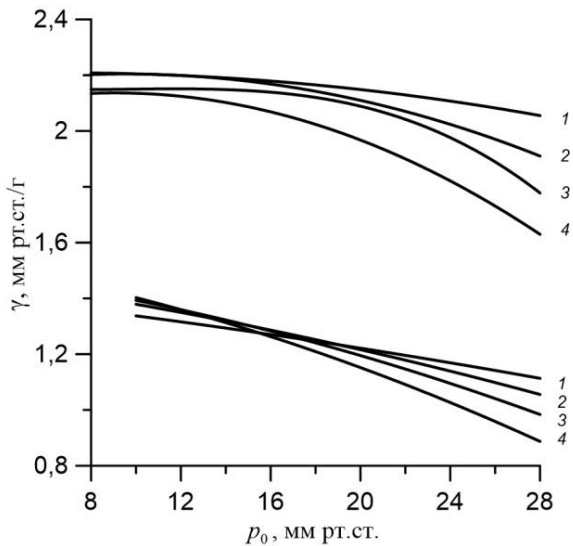


Рис. 5. Сравнение зависимостей коэффициента эластоподъема  $\gamma$  от истинного давления  $p_0$  для очень жесткого и нормального глаза. Верхнее семейство кривых:  $E_s = 60$  МПа,  $E_c = 0,9$  МПа; нижнее семейство:  $E_s = 10$  МПа,  $E_c = 0,3$  МПа;  $\zeta = 90$  (кривые 1), 60 (2), 30 (3), 1 (4)

На рис. 5 представлена зависимость коэффициента эластоподъема от истинного давления для двух глаз, сильно различающихся жесткостями обоих компонентов при разных параметрах нелинейности. Один глаз можно назвать нормальным: его роговичная жесткость  $E_c = 0,3$  МПа, а склеральная –  $E_s = 10$  МПа, что соответствует средним значениям этих величин. Другой – очень жесткий: обе жесткости в несколько раз превышают норму:  $E_c = 0,9$  МПа,  $E_s = 60$  МПа. Видно, что независимо от степени нелинейности роговицы и истинного давления коэффициент  $\gamma$  для жесткого глаза оказывается заметно больше, чем для нормального, достигая при малых давлениях величины 2,2 мм рт. ст./г. Для глаза с нормальной жесткостью компонентов значения коэффициента эластоподъема, хотя и существенно зависят от давления, не могут превышать 1,4 мм рт. ст./г.

Если для нормального глаза  $\gamma$  уменьшается с ростом давления более или менее равномерно, то для жесткого при малых давлениях возникает область его медленного падения – практически плато. В случае нелинейной роговицы область плато оказывается заметно шире, чем в случае линейной, захватывая умеренные давления – до 20 мм рт. ст. и выше. Подчеркнем, что для достижения высоких значений коэффициента эластоподъема – порядка 2 мм рт. ст./г и выше – необходима высокая жесткость обоих компонентов глазного яблока. Это видно из рис. 4, б: уменьшение жесткости роговицы ведет к значительному уменьшению  $\gamma$  даже при очень большой склеральной жесткости. Такой эффект понятен: хотя в общей поверхности корнеосклеральной оболочки доля роговицы многократно меньше, чем склеры, но при

очень жесткой склере растяжимость хоть и необширной, но существенно более мягкой роговицы становится определяющей для компенсации роста давления. Практически эта ситуация вряд ли встречается часто. Во всяком случае, с возрастом и при глаукоме возрастают жесткости как склеры, так и роговицы [3; 14; 18; 26–28].

## Обсуждение

Анализ, проведенный на основе эффективной модели, учитывающей нелинейно упругое поведение роговицы, уточнил и качественно подтвердил основные результаты, полученные нами ранее с использованием для роговицы физически линейной модели: измеряемый при дифференциальной тонометрии коэффициент эластоподъема зависит не только от жесткостей компонентов глаза, но (не менее значительно) и от истинного давления. Исследование в широком диапазоне практически возможных значений параметров (включая теперь и параметр нелинейности) показало, что коэффициент эластоподъема растет с увеличением как склеральной, так и роговичной жесткостей и падает с ростом истинного давления. Учет нелинейности приводит к некоторому увеличению расчетных значений этого коэффициента. Влияние параметра нелинейности сильнее сказывается как при больших жесткостях (и роговичной, и склеральной), так и при высоких давлениях. В области значений, где нелинейность роговицы существенна, увеличение этого параметра ведет к росту коэффициента эластоподъема.

В расчетах, представленных в настоящей работе, удалось получить при определенных значениях параметров большие коэффициенты эластоподъема (до 2,2 мм рт. ст./г), чего ранее не удавалось достичь в рамках физически линейной модели. Такие значения достаточно часто встречаются при клинических измерениях. Для иллюстрации приведем диаграмму, в которой сведены данные обследования группы пациентов с подозрением на первичную открытоугольную глаукому. Два измерения, давшие значения коэффициента эластоподъема порядка 3 мм рт. ст./г и выше, скорее всего, были не вполне качественно выполнены, что не редкость при клиническом обследовании. Однако можно предположить, что и для этих измерений коэффициент был большим, а обнаружения этого факта достаточно для диагностики (рис. 6).

Тот факт, что ранее нам не удавалось получать в расчетах высокие значения коэффициента эластоподъема, не связан только с учетом физической нелинейности роговицы. В самом деле, рис. 5 демонстрирует достижение им весьма высокого значения  $\gamma \approx 2,3$  мм рт. ст./г при параметре нелинейности  $\zeta = 1$ , соответствующем практически линейному случаю. Однако такой коэффициент эластоподъема получается лишь при сочетании высоких жесткостей обоих компонентов глаза с достаточно низкими давлениями, а соответствующий набор параметров не попадал в их ранее исследованный диапазон. Нелинейность рогови-

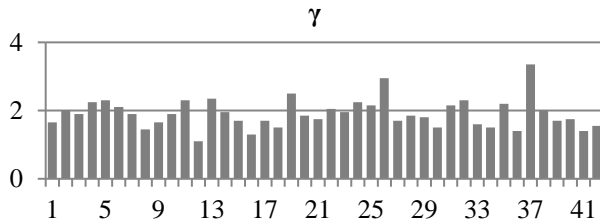


Рис. 6. Представленные в виде диаграммы данные дифференциальной тонометрии для группы пациентов: по оси абсцисс – порядковый номер обследуемого, по оси ординат – измеренный коэффициент эластоподъема (в мм рт. ст./г). Клиническое исследование проводилось в НИИ глазных болезней им. Гельмгольца с использованием тонографа *GlauTest 60* при весах плунжера  $G_1 = 5,5$  и  $G_2 = 7,5$  г. Данные обрабатывались по формуле (2)

цы тем не менее сказывается существенно, но несколько в ином отношении: в медленности убывания  $\gamma$  с возрастанием истинного давления. В широкой области давлений кривая  $\gamma(p_0)$  даже практически образует плато. При линейной же роговице с ростом давления коэффициент  $\gamma$  падает довольно быстро. Таким образом, нелинейность способствует большей вероятности обнаружения высоких значений  $\gamma$  независимо от давления.

Из проведенных расчетов видно, что высокие значения коэффициента эластоподъема наблюдаются лишь при очень высоких (в разы превышающих норму) значениях обеих жесткостей. Возможность теоретического объяснения больших значений  $\gamma$  дает дополнительный довод в пользу эффективности разрабатываемого нами подхода. Кроме того, сформулированное выше утверждение позволяет до известной степени реабилитировать процедуру дифференциальной тонометрии как метода оценки жесткости глаза.

Действительно, первоначальное представление о том, что результат дифференциальной тонометрии сам

по себе (без дополнительной информации) позволяет судить о жесткости (ригидности) глаза ошибочно, поскольку определяемый показатель (коэффициент эластоподъема) сильно зависит от внутриглазного давления. Однако при высоких значениях этого коэффициента можно с уверенностью сказать, что независимо от истинного давления жесткость обоих компонентов глаза ненормально высока. А именно обнаружение очень жестких глаз, в которых наиболее вероятно развитие глаукомы, и составляет основную задачу дифференциальной тонометрии. Таким образом, теоретически обоснована эффективность этой процедуры как метода диагностики глаукомы, что было подтверждено ранее клиническими исследованиями, в которых мы принимали участие.

Можно утверждать, что при коэффициенте эластоподъема порядка 2 мм рт. ст./г и выше жесткость обоих компонентов корнеосклеральной оболочки – роговицы и склеры – заведомо аномально велика. С другой стороны, коэффициент эластоподъема порядка 1,5 мм рт. ст./г и ниже говорит о значениях жесткостей роговицы и склеры, близких к их средним значениям. Таким образом, по данным только дифференциальной тонометрии можно выделить две группы глаз, в одной из которых корнеосклеральная оболочка очень жесткая, а в другой – жесткость тканей глаза можно считать нормальной. В промежуточной области значений коэффициента эластоподъема с ростом  $\gamma$  возрастает вероятность (от нулевой до стопроцентной) повышенной жесткости корнеосклеральной оболочки. Реальная же жесткость может быть оценена только при наличии данных об истинном давлении.

В полном объеме задача оценки параметров, характеризующих упругие свойства глаза, может быть решена лишь при комплексном определении всех трех основных механических характеристик глаза: двух жесткостей (роговичной и склеральной) и истинного внутриглазного давления. Такая оценка не может быть надежно выполнена с помощью лишь одного тонометра, хотя бы и с использованием разных грузов [9].

## Список литературы

1. Бауэр С.М., Венатовская Л.А., Франус Д.В., Федотова Л.А. Оценка изменения напряженно-деформированного состояния глаза и показателей внутриглазного давления после рефракционной коррекции гиперметропии // Российский журнал биомеханики. – 2015. – Т. 19, № 2. – С. 136–143.
2. Бауэр С.М., Венатовская Л.А., Шалпегин Г.С. Конечнo-элементная модель измерения внутриглазного давления тонометром Шюотца // Российский журнал биомеханики. – 2019. – Т. 23, № 2. – С. 197–203.
3. Иомдина Е.Н., Петров С.Ю., Антонов А.А., Новиков И.А., Пахомова И.А. Корнеосклеральная оболочка глаза: анализ структурно-биомеханических особенностей в возрастном аспекте. Обзор литературы // Офтальмология. – 2016. – Т. 13, № 1. – С. 10–19.
4. Моисеева И.Н., Штейн А.А. Анализ зависимости давление – объем для глазного яблока, нагруженного плоским штампом, на основе двухсегментной упругой модели // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2011. – № 5. – С. 3–15.
5. Моисеева И.Н., Штейн А.А. Оценка корректности стандартной методики расчета внутриглазного давления при тонометрии по Шюотцу // Российский журнал биомеханики. – 2015. – Т. 19, № 3. – С. 243–257.
6. Моисеева И.Н., Штейн А.А. Математическое моделирование аппланационного нагружения глазного яблока с учетом нелинейности упругих свойств роговицы // Российский журнал биомеханики. – 2020. – Т. 24, № 3. – С. 272–281.
7. Моисеева И.Н., Штейн А.А. Влияние нелинейности

- упругих свойств роговицы на ее деформирование при нагружении глаза тонометром Шиотца // Российский журнал биомеханики. – 2021. – Т. 25, № 3. – С. 230–240.
8. Моисеева И.Н., Штейн А.А. Влияние нелинейности упругих свойств роговицы на результаты тонометрии по Шиотцу: оценка на основе двухкомпонентной математической модели // Биофизика. – 2022. – Т. 67 (в печати).
  9. Моисеева И.Н., Штейн А.А., Любимов Г.А. Оценка упругих свойств глаза с помощью дифференциальной тонометрии тонометром Шиотца: анализ измерительной процедуры на основе двухкомпонентной математической модели // Биофизика. – 2016. – Т. 61, № 6. – С. 1219–1227.
  10. Моисеева И.Н., Штейн А.А., Любимов Г.А. Оценка упругих характеристик глазного яблока по отклику энуклеированного глаза на введение заданных объемов жидкости // Российский журнал биомеханики. – 2020. – Т. 24, № 4. – С. 412–429.
  11. Штейн А.А., Моисеева И.Н., Любимов Г.А. Математическая модель роговицы глаза с учетом экспоненциальной нелинейности ее упругих свойств при условии геометрической малости деформаций // Российский журнал биомеханики. – 2019. – Т. 23, № 3. – С. 375–390.
  12. Anderson K., El-Sheikh A., Newson T. Application of structural analysis to the mechanical behaviour of the cornea // J. Roy. Soc. Interface. – 2004. – Vol. 1, no. 1. – P. 3–15.
  13. Bharathi R.B., Poojary R.G., Prabhu G.K., Ve R.S. Finite element method for estimation of applanation force and to study the influence of intraocular pressure of eye on tonometry // Int. Ophthalmol. – 2022. – Vol. 42. – P. 1997–2005.
  14. Blackburn B.J., Jenkins M.W., Rollins A.M., Dupps W.J. A review of structural and biomechanical changes in the cornea in aging, disease, and photochemical crosslinking // Front. Bioeng. Biotechnol. – 2019. – Vol. 7. – Article no. 66. DOI: 10.3389/fbioe.2019.00066
  15. Bryant M.R., McDonnell P.J. Constitutive laws for biomechanical modeling of refractive surgery // J. Biomech. Eng. – 1996. – Vol. 118, no. 4. – P. 473–481.
  16. Clark J.H. A Method for measuring elasticity in vivo and results obtained on the eyeball at different intraocular pressures // Am. J. Physiol. – 1932. – Vol. 101. – P. 474–481.
  17. Corneal biomechanics and refractive surgery / Ed. F.A. Guarnieri. – Berlin: Springer, 2015. – 146 p.
  18. Coudrillier B., Pijanka J., Jefferys J., Sorensen T., Quigley H.A., Boote C., Nguyen T.D. Collagen structure and mechanical properties of the human sclera: analysis for the effects of age // J. Biomech. Eng. – 2015. – Vol. 137, no. 4. – Article no. 041006.
  19. Dyk D.W., Miller K.M. Mechanical model of human eye compliance for volumetric occlusion // J. Cataract. Refract. Surg. – 2018. – Vol. 44. – P. 231–236.
  20. Elsheikh A., Alhasso D., Rama P. Biomechanical properties of human and porcine corneas // Exp. Eye Res. – 2008. – Vol. 86. – P. 783–790.
  21. Elsheikh A., Wang D., Kotecha A., Brown M., Garway-Heath D. Evaluation of Goldmann applanation tonometry using a nonlinear finite element ocular model // Ann. Biomed. Eng. – 2006. – Vol. 34. – P. 1628–1640.
  22. Friedenwald J.S. Contribution to the theory and practice of tonometry // Am. J. Ophthalmol. – 1937. – Vol. 20, no. 10. – P. 985–1024.
  23. Friedenwald J.S. Some problems in the calibration of tonometers // Am. J. Ophthalmol. – 1948. – Vol. 31. – P. 935–944.
  24. Friedenwald J.S. Standardization of tonometers: decennial report by the committee on standardization of tonometers. – Omaha: Am. Acad. Ophthalmol. Otolaryngol., 1954. – 177 p.
  25. Fu J., Haghighi-Abayneh M., Pierron F, Ruiz P.D. Depth-resolved full-field measurement of corneal deformation by optical coherence tomography and digital volume correlation // Exp. Mech. – 2016. – Vol. 56, no. 7. – P. 1203–1217.
  26. Garzón N., Poyales F., Illarramendi I., Mendicute J., Jáñez Ó., Caro P., Jáñez O., Argüeso F., López A. Corneal densitometry and its correlation with age, pachymetry, corneal curvature, and refraction // Int. Ophthalmol. – 2017. – Vol. 37. – P. 1263–1268.
  27. Geraghty B., Whitford C., Boote C., Akhtar R., Elsheikh A. Age-related variation in the biomechanical and structural properties of the corneo-scleral tunic // Mechanical Properties of Aging Soft Tissues / eds. B. Derby and R. Akhtar. – Boston: Springer, 2015. – P. 207–235.
  28. Liu B., McNally S., Kilpatrick J.I., Jarvis S.P., O'Brien C.J. Aging and ocular tissue stiffness in glaucoma // Surv. Ophthalmol. – 2018. – Vol. 63, no. 1. – P. 56–74.
  29. Macri F.J., Wanko T., Grimes P.A. The elastic properties of the human eye // AMA Arch. Ophthalmol. – 1958. – Vol. 60, no. 6. – P. 1021–1026.
  30. McBain E. H. Tonometer calibration. II. Ocular rigidity // Arch. Ophthalmol. – 1958. – Vol. 60. – P. 1080–1091.
  31. Moses R.A. Theory of the Schiøtz tonometer and its empirical calibration // Trans. Am. Ophthalmol. Soc. – 1971. – Vol. 69. – P. 494–562.
  32. Nejad T., Foster C. Finite element modelling of cornea mechanics: A review // Arq. Bras. Oftalmol. – 2014. – Vol. 77, no. 1. – P. 60–65.
  33. Pallikaris I.G., Kymionis G.D., Ginis H.S., Kountis G.A., Tsilimbaris M.K. Ocular rigidity in living human eyes // Invest. Ophthalmol. Vis. Sci. – 2005. – Vol. 46, no. 2. – P. 409–414.
  34. Ridley F. The intraocular pressure and drainage of the aqueous humour // Brit. J. Exp. Pathol. – 1930. – Vol. 11, no. 4. – P. 217–240.

**Финансирование.** Работа выполнена в рамках Госпрограммы АААА-А19-119012990119-3.

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.



# DIFFERENTIAL TONOMETRY WITH A SCHIOTZ TONOMETER: MATHEMATICAL MODELING WITH ACCOUNT FOR THE NONLINEARITY OF THE ELASTIC BEHAVIOR OF THE CORNEA AND COMPARISON WITH CLINICAL DATA

I.N. Moiseeva, A.A. Stein

Institute of Mechanics, Moscow State Lomonosov University, Moscow, Russia

---

## ARTICLE INFO

Received: 31 August 2022  
Approved: 09 October 2022  
Accepted for publication: 10 December 2022

### Key words:

eye, cornea, nonlinearity of elastic properties, differential tonometry, Schi-  
otz tonometer, mathematical models.

---

## ABSTRACT

Mathematical modeling of the diagnostic procedure of differential tonometry based on loading the eye with a Schiötz tonometer using two or more weights of the plunger, one of the two structural elements of this tonometer, is performed. The model of the eyeball developed earlier by the authors is used, based on the representation of the cornea as a momentless two-dimensional elastic surface and the scleral region as a zero-dimensional elastic element that responds with a change in pressure to a change in the volume of the fluid contained in it. Unlike previous works, in which a theoretical study of differential tonometry was carried out based on a physically linear model of the cornea, the nonlinearity of its elastic behavior is taken into account on the basis of an effective approach that made it possible to describe this nonlinearity by means of a single parameter. It is shown that the dependence of the tonometric pressure on the weight of the plunger remains almost linear, which makes it possible to introduce the pressure difference coefficient  $\gamma$  as the slope of the corresponding straight line. This coefficient increases with both scleral and corneal stiffness and decreases with true pressure. Accounting for nonlinearity leads to increase in the calculated values of  $\gamma$  at sufficiently high both true pressures and stiffnesses of the two components of the eyeball, as well as to an expansion of the pressure range for which these values are large. It is shown that two groups of eyes can be distinguished, in one of which, characterized by high values of the pressure difference coefficient, both components of the corneal coat are very rigid, and in the other, where these values are significantly lower, the stiffness of the eye tissues can be considered normal. At the same time, an intermediate range of  $\gamma$  values remains, for which such definite conclusions cannot be drawn only from the result of differential tonometry. However, the ability to isolate a group of very stiff eyes that are particularly likely to have glaucoma makes this procedure useful in diagnosing this disease.

© PNRPU